

---

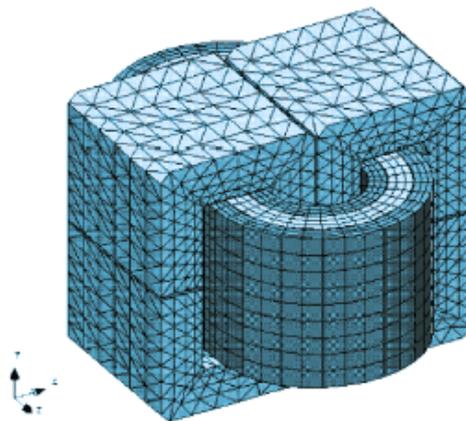
## *Systemes électromécaniques*

---

### **Chapitre 01**

## ***CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES*** ***RAPPEL***

---





# T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

<b>1. CIRCUITS ELECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES.....</b>	<b>1</b>
1.1 GÉNÉRALITÉS .....	1
1.2 EQUATIONS DE MAXWELL .....	1
1.3 LE POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE .....	2
1.3.1 L'équation vectorielle de Poisson.....	2
1.3.2 Loi d'Ampère pour le potentiel vecteur (loi expérimentale) .....	3
1.4 CHAMP D'INDUCTION MAGNÉTIQUE B .....	3
1.4.1 Définition .....	3
1.4.2 Exemple de calcul .....	4
1.5 CHAMP D'EXCITATION MAGNÉTIQUE H.....	7
1.5.1 Définition .....	7
1.5.2 Théorème d'Ampère .....	7
1.6 FLUX MAGNÉTIQUE .....	8
1.6.1 Définition .....	8
1.6.2 Propriété : loi de conservation du flux .....	9
1.7 FORCE DE LORENTZ .....	10
1.7.1 Force magnétique agissant sur un courant électrique .....	10
1.8 FORCE DE LAPLACE.....	11
1.9 FORCE ÉLECTROMOTRICE (TENSION INDUITE).....	12
1.10 CIRCUITS MAGNÉTIQUES.....	13
1.10.1 Tube d'induction magnétique .....	13
1.10.2 Potentiel magnétique scalaire .....	13
1.10.3 Réductance magnétique .....	13
1.10.4 Inductance propre .....	14
1.10.5 Inductance mutuelle.....	15
1.11 CIRCUITS ÉLECTRIQUES .....	16
1.11.1 Tension induite .....	16
1.11.2 Flux totalisé .....	17
1.11.3 Tension généralisée.....	17
1.11.4 Circuits couplés .....	18
1.11.5 Coefficient de couplage et coefficient de dispersion .....	19
1.12 PROPRIÉTÉS DE LA MATIÈRE .....	20
1.12.1 Milieux magnétiques isotropes .....	20
1.12.2 Classification des milieux magnétiques.....	20
1.12.3 Loi comportementale des milieux ferromagnétiques : courbes $B=f(H)$ .....	22
1.12.4 Classification des matériaux ferromagnétiques .....	23
1.12.5 Pertes dans la matière .....	25
1.12.6 Circuits magnétiques .....	27
1.12.7 Réductance – Loi d'Hopkinson .....	29
1.12.8 Analogie magnétique – Electrique.....	30
1.12.9 Calcul de l'inductance propre d'un circuit .....	31
1.13 LES AIMANTS.....	32
1.13.1 Première aimantation, désaimantation .....	32
1.13.2 Cycle d'hystérésis et température.....	32
1.13.3 Caractéristiques d'aimants de diverses natures .....	34
1.13.4 Droite de recul et point de travail .....	35
1.13.5 Energie magnétique externe.....	39
1.13.6 Application aux actionneurs.....	40

Bibliographie



# 1. CIRCUITS ELECTRIQUES ET MAGNETIQUES.

## 1.1 GÉNÉRALITÉS

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions principales des circuits électriques et magnétiques afin d'assurer la compréhension du fonctionnement des systèmes électromécaniques faisant l'objet de ce cours.

## 1.2 EQUATIONS DE MAXWELL

Les phénomènes électriques et magnétiques ont tout d'abord été étudiés séparément par plusieurs physiciens de renom, dont les principaux sont Franklin (1706 – 1790), Coulomb (1736 – 1806) Oested (1775 – 1851), Ampère (1775 – 1836), Gauss (1777 – 1855) et Faraday (1791 – 1867). C'est cependant à Maxwell (1831 – 1879) que l'on doit la formulation la plus complète des relations liant entre elles les grandeurs électriques et magnétiques. Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale d'un champ électrique ou magnétique en un point de l'espace entraîne ou est due à l'existence, ou la variation temporelle, d'un autre champ au même point de l'espace. Il s'agit là de leur forme locale, ou encore différentielle.

<i>Forme locale</i>	<i>Forme globale</i>
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dA = 0$ : Conservation du flux magnétique
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$	$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dA = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) dA$ : Loi d'ampère
$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dA = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dA$ : Loi d'induction de Faraday
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} dA = 0$ : Conservation de la charge

avec :

$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B}$ :	Vecteur champ d'induction magnétique [T]
	$\mathbf{H}$ :	Vecteur champ magnétique [A/m]
	$\mu_0$ :	Perméabilité absolue du vide ( $4\pi 10^{-7}$ ) [Vs/(Am)]
	$\mu_r$ :	Perméabilité relative d'un matériau [1]
$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D}$ :	Vecteur déplacement électrique [As/m <sup>2</sup> ]
	$\mathbf{E}$ :	Vecteur champ électrique [V/m]
	$\epsilon_0$ :	Permittivité absolue du vide ( $8.85410^{-12}$ ) [As/(Vm)]
	$\epsilon_r$ :	Permittivité absolue du vide [1]
$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$	$\mathbf{E}$ :	Vecteur champ électrique [V/m]
	$\mathbf{J}$ :	Vecteur densité de courant [A/m <sup>2</sup> ]
	$\rho$ :	Conductivité électrique [A/(Vm)]
$\nabla$	:	Opérateur différentiel $\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$
$\mathbf{grad} f = \nabla f$	:	Gradient $\mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$	:	<i>Produit scalaire de l'opérateur différentiel</i> $\frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$
$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$	:	<i>Produit vectoriel de l'opérateur différentiel</i> $\mathbf{e}_x \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$
$\int_V \dots dV$	:	<i>Intégrale sur un volume</i>
$\oint_S \dots dA$	:	<i>Intégrale sur une surface fermée</i>
$\oint_C \dots dl$	:	<i>Intégrale sur un contour fermé</i>

Sachant que la divergence de l'induction est nulle et que d'autre part la divergence d'un rotationnel est toujours identiquement nul, on peut en tout point de l'espace identifier l'induction avec le rotationnel d'une grandeur vectorielle  $\mathbf{A}$  [Vs/m] appelée le potentiel vecteur magnétique

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \end{array} \right\} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad :$$

On dit que l'induction  $\mathbf{B}$  dérive de  $\mathbf{A}$ . Il faut noter que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  ne définit  $\mathbf{A}$  qu'à un vecteur irrotationnel près; en effet, on peut remplacer  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{C}$  avec  $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ .

### 1.3 LE POTENTIEL VECTEUR MAGNÉTIQUE

#### 1.3.1 L'équation vectorielle de Poisson

Dans un milieu homogène, sans charge d'espace, on peut écrire

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{\mu} \left( \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \end{aligned} \quad 1.1$$

Le potentiel vecteur a été choisi uniquement en terme de son rotationnel. Il est encore possible de spécifier indépendamment sa divergence que l'on choisit de façon à avoir

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad 1.2$$

On obtient ainsi l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad 1.3$$

### 1.3.2 Loi d'Ampère pour le potentiel vecteur (loi expérimentale)

On peut démontrer que la représentation spatiale du potentiel vecteur, lorsque le milieu est uniformément réparti (perméabilité  $\mu$  indépendante de la position dans l'espace)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad 1.4$$

où  $d\mathbf{l}'$  est l'élément du contour  $C'$  sur lequel se porte l'intégration.

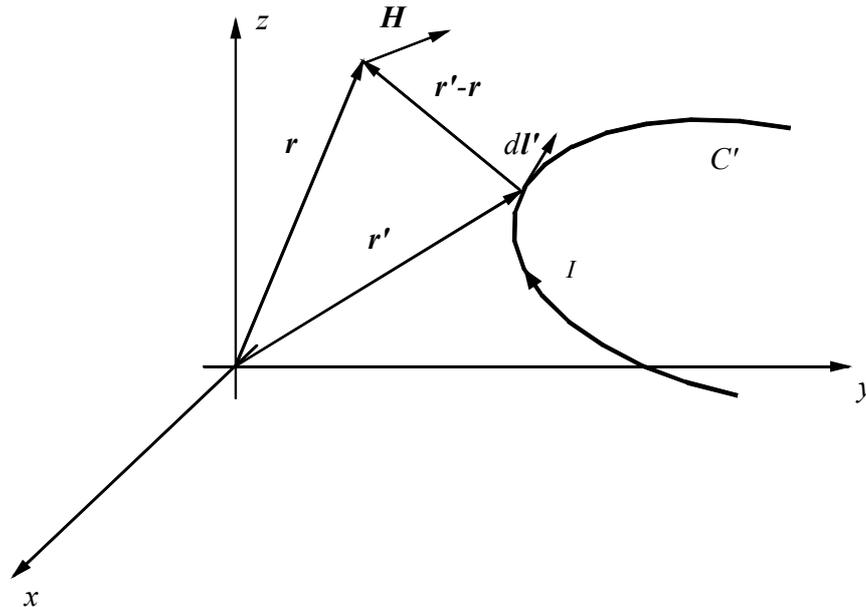


Figure 1-1 : Définition des grandeurs utilisées dans la loi d'Ampère

Connaissant le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , l'induction  $\mathbf{B}$  est obtenue en prenant son rotationnel, puis le champ magnétique  $\mathbf{H}$  en divisant par la perméabilité  $\mu$ .

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad 1.5$$

L'intégrale de la relation 1.4 ne portant pas sur la même variable que le rotationnel, il est possible s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu} \nabla_r \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_C \nabla_r \times \frac{I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad 1.6$$

## 1.4 CHAMP D'INDUCTION MAGNÉTIQUE $\mathbf{B}$

### 1.4.1 Définition

Le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  traduit l'effet du déplacement des charges électriques. Si un courant constant traverse un conducteur électrique de longueur élémentaire  $d\mathbf{l}$ , on écrit localement la **loi de Biot et Savart**

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{u}}{r^2} \quad 1.7$$

avec :

- $d\mathbf{l}$  : longueur du circuit soumis au courant  $I$ , orienté dans le sens de  $I$  ;
- $r$  : distance de l'élément  $d\mathbf{l}$  au point d'expression de l'induction  $d\mathbf{B}$ , portée par le vecteur  $\mathbf{u}$  (vecteur unité allant de  $d\mathbf{l}$  vers le point d'expression de  $d\mathbf{B}$ ) ;
- $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ). L'induction s'exprime en Tesla ;

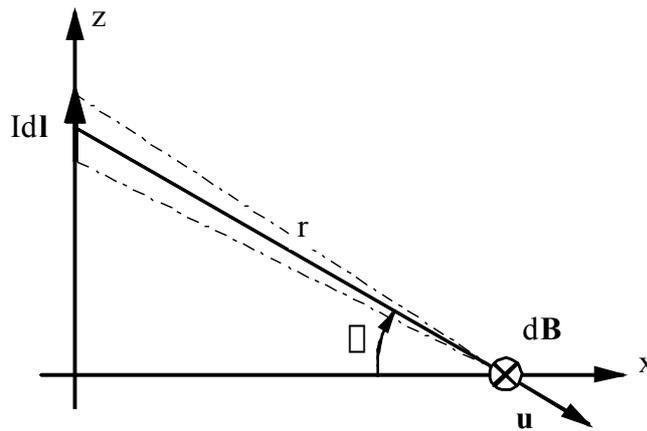


Figure 1-2 : Champ d'induction créé par un courant circulant dans un conducteur

## 1.4.2 Exemple de calcul

### 1.4.2.1 Cas d'un fil de longueur infini

Le calcul s'effectue en deux étapes. Nous allons d'abord calculer le champ créé par une portion de fil de longueur  $d\mathbf{l}$  puis nous intégrerons le long du fil pour obtenir le champ résultant  $\mathbf{B}$ .

### 1.4.2.2 Etude d'un élément $d\mathbf{l}$

On reprend la loi de Biot et Savart. Le calcul du produit vectoriel  $d\mathbf{l} \times \mathbf{u}$  fait apparaître l'angle  $\alpha$  entre le vecteur  $d\mathbf{l}$  et le vecteur  $\mathbf{u}$ . Ainsi  $|d\mathbf{l} \times \mathbf{u}| = dl \cdot u \sin(\alpha)$ .

Si l'on observe le triangle formé par l'élément  $d\mathbf{l}$  et le point de mesure de  $d\mathbf{B}$  (Figure 1-3), on obtient les relations suivantes :

$$OO' = \frac{dl}{2} \sin(\alpha) = r \sin \frac{d\vartheta}{2} \cong r \frac{d\vartheta}{2} \quad 1.8$$

$$dl \sin(\alpha) \cong r d\vartheta \quad 1.9$$

Ainsi, le module du champ d'induction magnétique créé par l'élément  $d\mathbf{l}$  a pour expression :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vartheta}{r} \quad 1.10$$

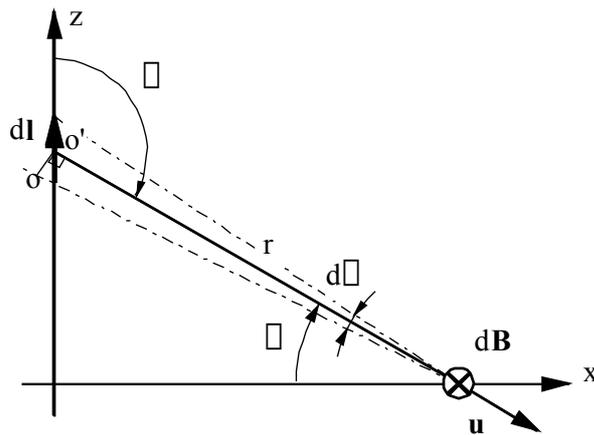


Figure 1-3 : Champ d'induction créée par un courant circulant dans un conducteur de longueur  $l$

Son orientation est donnée par la règle du tire-bouchon, ici rentrant dans la « feuille » (courant allant du bas vers le haut, champ à calculer à droite).

#### 1.4.2.3 Etude pour un fil infini

Dans ce cas, il faut intégrer la valeur du champ  $dB$  sur un angle  $\vartheta$  allant de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$  :

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad 1.11$$

$r = \frac{d}{\cos(\vartheta)}$

où  $d$  est la petite distance du point de mesure au fil.

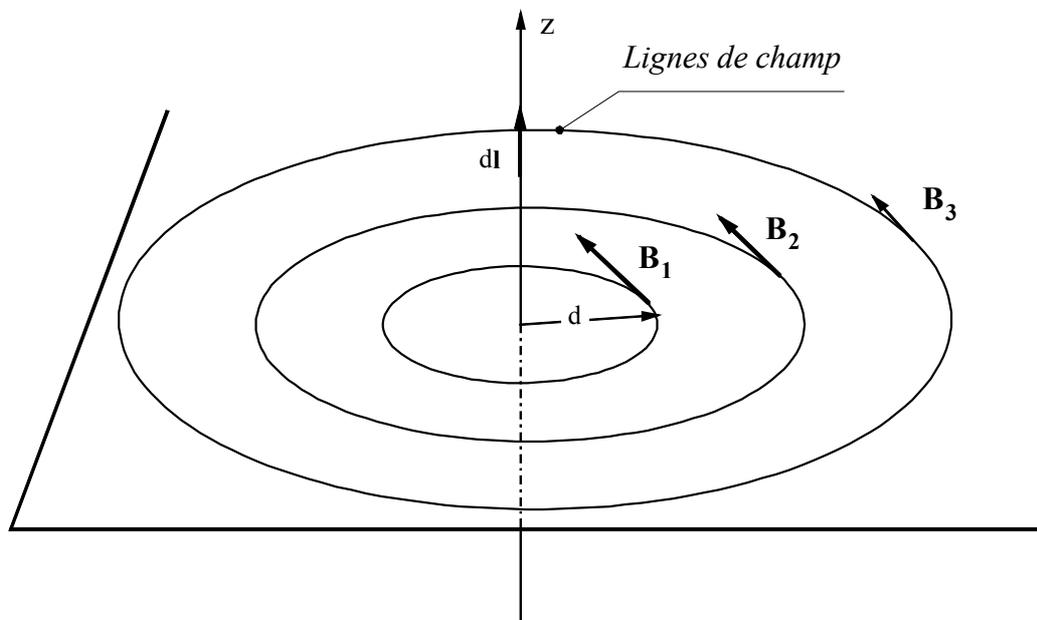


Figure 1-4 : Champ d'induction créée par un courant circulant dans un conducteur de longueur infinie

La valeur du champ diminue avec la distance. Par symétrie, les lignes de champ forment des cercles autour du fil.

1.4.2.4 Cas d'une spire circulaire : calcul sur l'axe de la spire

La spire possède un rayon R. Le point de mesure est à une distance r de la spire, la spire est vue sous un angle  $\beta$  par rapport à son axe

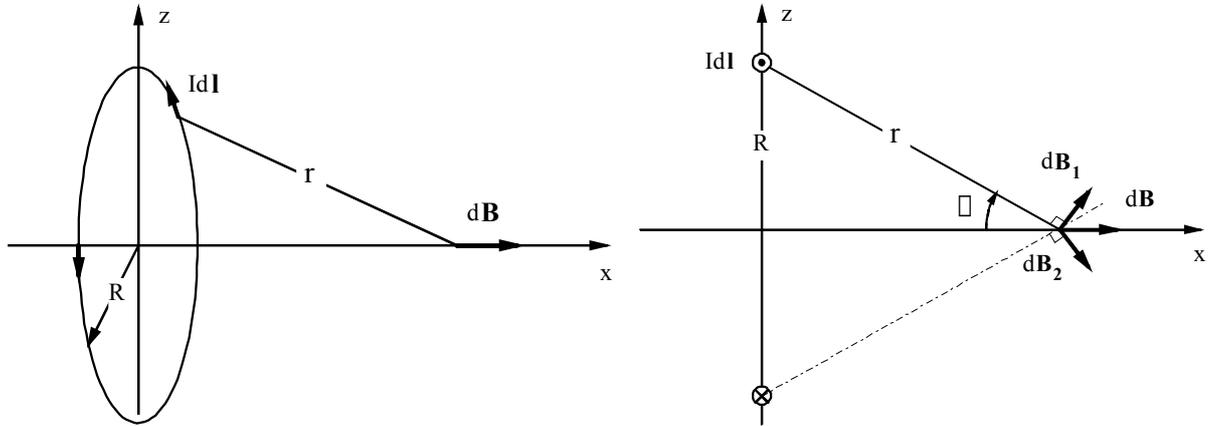


Figure 1-5 : Champ d'induction crée par un courant circulant dans une spire

Avant d'effectuer le calcul, il faut remarquer que la résultante du champ B, par symétrie, est parallèle à l'axe de la spire. En effet, deux points de la spire diamétralement opposés ajoutent leur composante axiale mais compensent leur composante radiale.

Seule la composante sur l'axe x est donc à calculer :

$$dB_x = |d\mathbf{B}| \sin(\beta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin(\beta) \tag{1.12}$$

or

$$\begin{aligned} |d\mathbf{l} \times \mathbf{u}| &= dl \\ dl &= R d\vartheta \\ R &= r \sin(\beta) \end{aligned} \tag{1.13}$$

avec  $\vartheta$  : angle de parcours de la spire vis à vis du point de calcul de B. Donc

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{r^3} d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{r^3} \tag{1.14}$$

Au centre de la spire le champ d'induction B a pour module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{1.15}$$

Par la suite, dans le domaine de l'électrotechnique, l'induction magnétique ne sera pas à déterminer par la relation de Biot et Savart car les calculs qui en découlent sont trop complexes. Nous utiliserons le vecteur d'excitation magnétique H.

## 1.5 CHAMP D'EXCITATION MAGNÉTIQUE $\mathbf{H}$

### 1.5.1 Définition

Le champ d'excitation  $\mathbf{H}$  rend compte de l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Il s'exprime en Ampères par mètre. Dans le vide ou dans l'air : l'induction et l'excitation magnétique sont colinéaires :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad 1.16$$

Au sein d'un matériau magnétique : il en est de même. Mais on fait intervenir la perméabilité relative du matériau  $\mu_r$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad 1.17$$

### 1.5.2 Théorème d'Ampère

La circulation du vecteur  $\mathbf{H}$  le long d'une courbe fermée (C) quelconque est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s'appuyant sur le contour (C).

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \pm I_k \quad 1.18$$

Le courant sera pris positivement s'il est dans le sens de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

Le courant sera pris négativement s'il est dans le sens contraire de la normale à la surface (règle du tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C).

#### 1.5.2.1 Exemple de calcul

##### 1.5.2.1.1 Cas général

Soit la configuration de la figure ci-dessous

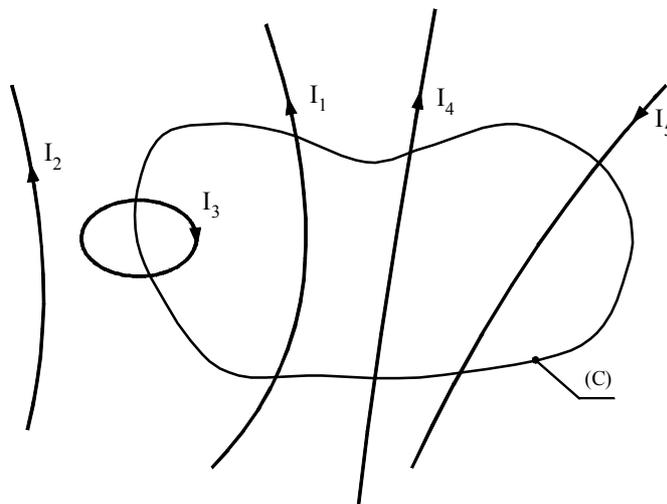


Figure 1-6 : Théorème d'Ampère

Le courant  $I_2$  n'intervient pas dans le calcul. L'application du théorème d'Ampère donne :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_1 - I_3 + I_4 - I_5 \quad 1.19$$

### 1.5.2.2 Cas du fil de longueur infinie

Les lignes de champ des vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  sont des cercles dont l'axe normal est le conducteur électrique. Nous allons prendre comme contour fermé une ligne de champ située à une distance  $R$ . Sur ce contour, le champ est constant.

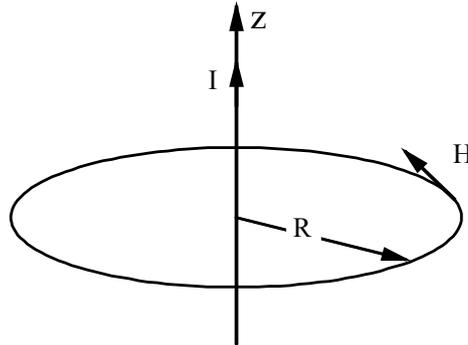


Figure 1-7 : Champ magnétique créé par un courant circulant dans un conducteur de longueur infinie

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = H \cdot 2\pi R \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R} \quad 1.20$$

On retrouve le résultat calculé en 1.4.2.3 ( $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ).

## 1.6 FLUX MAGNÉTIQUE

### 1.6.1 Définition

Le flux du vecteur d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  à travers une surface fermée ( $S$ ) est définie par :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad 1.21$$

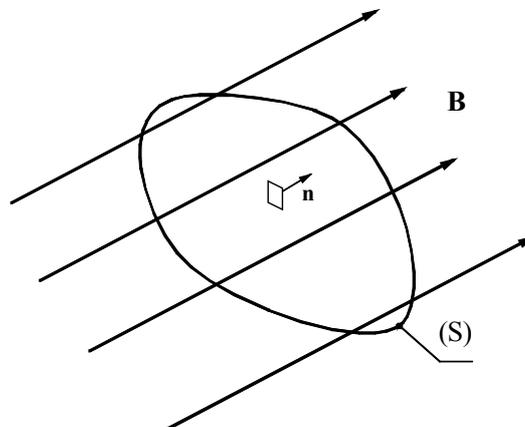


Figure 1-8 : Flux au travers d'une surface quelconque

Avec  $\mathbf{n}$  vecteur normal à la surface  $S$ . Le flux magnétique s'exprime en Weber [Wb].

### 1.6.1.1 Cas d'une spire inclinée

On supposera le champ d'induction constant au travers de la spire S. On appellera  $\alpha$  l'angle entre la normale à la spire et le champ d'induction B :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{(S)} B \cdot \cos(\alpha) \, ds = B \cdot \cos(\alpha) \iint_{(S)} ds = BS \cos(\alpha) \quad 1.22$$

## 1.6.2 Propriété : loi de conservation du flux

### 1.6.2.1 Notion de tube d'induction

Un tube d'induction (ou de champ) est un morceau d'espace fermé s'appuyant sur deux contours fermés  $C_1$  et  $C_2$ , où chaque point de  $C_1$  est relié à un point de  $C_2$  par une ligne de champ magnétique (le champ y est tangentiel).

### 1.6.2.2 Propriété

Le flux magnétique est conservé au sein d'un tube de champ.

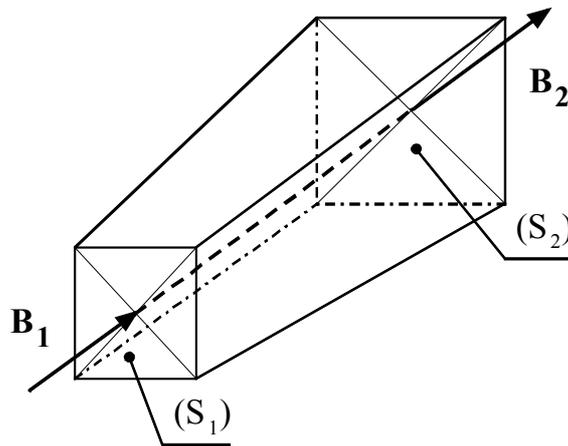


Figure 1-9 : Tube de flux

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1} &= \Phi_{S_2} \\ \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{S}_1 &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad 1.23$$

On peut généraliser ce principe en disant qu'au sein d'un volume fermé, le flux rentrant est égal au flux sortant.

### 1.6.2.3 Exemple

Soit la Figure 1-10, en appliquant la loi de conservation du flux on obtient comme relation

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3 \quad 1.24$$

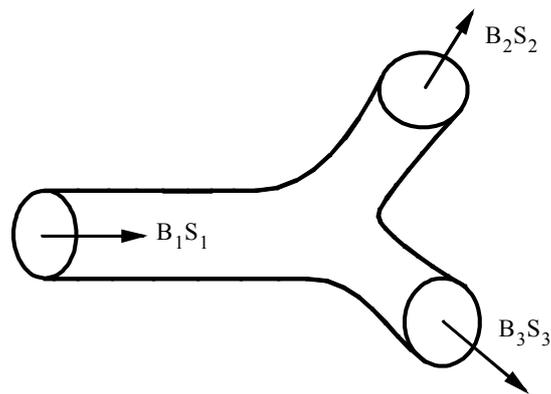


Figure 1-10 : Tube de flux avec embranchements

### 1.7 FORCE DE LORENTZ

Quand la particule se déplace dans une région où il y a un champ électrique et magnétique, la force totale est la somme de la force électrique  $q\mathbf{E}$  et de la force magnétique  $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ . On a donc :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad 1.25$$

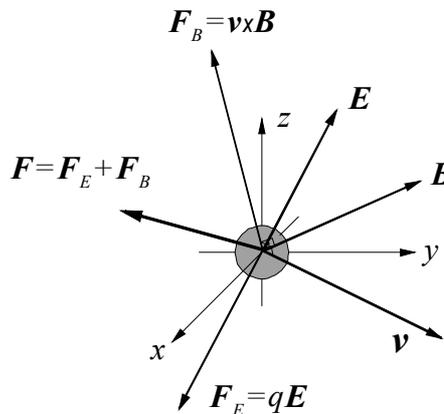


Figure 1-11 : Forces appliquées à une charge en mouvement dans un milieu électromagnétique

#### 1.7.1 Force magnétique agissant sur un courant électrique

Le courant électrique est un écoulement de charges électriques dans le vide ou à travers un milieu conducteur. L'intensité du courant électrique a été définie comme la charge passant par unité de temps au travers une section du conducteur. Considérons une section d'orientation quelconque du conducteur dans lequel se déplacent, avec une vitesse  $\mathbf{v}$ , des particules de charge  $q$ . S'il y a  $n$  particules par unité de volume, le nombre total de particules traversant une surface unité par unité de temps est  $n\mathbf{v}$ , et la densité de courant définie comme la charge passant par unité de temps à travers la surface unité est le vecteur

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \quad 1.26$$

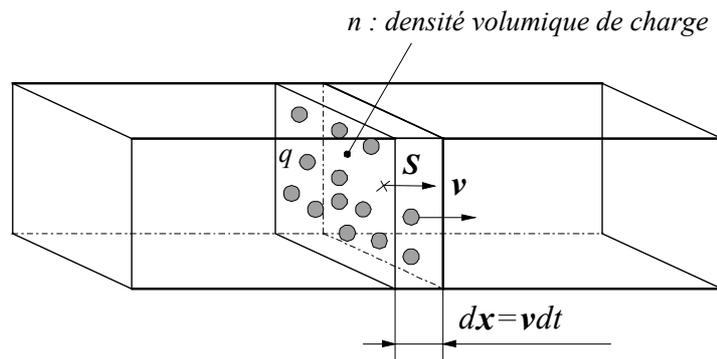


Figure 1-12 : Déplacement de charge dans un conducteur

Si  $S$  est l'aire de la section considérée du conducteur, le courant est le produit vectoriel

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \quad 1.27$$

Supposons maintenant que le conducteur soit dans un champ magnétique. La force agissant sur chaque charge est donnée par la relation 1.25 et comme il y a  $n$  particules par unité de volume la force  $\mathbf{f}$  par unité de volume est

$$\mathbf{f} = nq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad 1.28$$

et la force totale sur un volume fini s'obtient par intégration de cette expression sur tout le volume, soit

$$\mathbf{F} = \int_{\text{Volume}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad 1.29$$

Considérons maintenant le cas où le courant s'écoule à travers un conducteur. L'élément de volume  $dV$  est donné par  $S dl$  et par conséquent la relation 1.29 donne

$$\mathbf{F} = \int_{\text{Conducteur}} \mathbf{J} \times \mathbf{B} S dl = \int_{\text{Conducteur}} S \mathbf{J} \times \mathbf{B} dl = \int_{\text{Conducteur}} I \mathbf{u} \times \mathbf{B} dl \quad 1.30$$

Avec  $\mathbf{u}$  : vecteur unité normal à la surface  $S$

$S\mathbf{J}=I$ , et le courant  $I$  qui parcourt le fil est le même en tous points du conducteur en raison de la loi de conservation des charges électriques. Par conséquent la relation 1.30 pour la force agissant sur un conducteur parcouru par un courant devient

$$\mathbf{F} = I \int_{\text{Conducteur}} \mathbf{u} \times \mathbf{B} dl \quad 1.31$$

## 1.8 FORCE DE LAPLACE

L'équation de Laplace découle de la force de Lorentz. Elle est l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal placé dans un champ d'induction magnétique :

$$d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad 1.32$$

Cette relation peut être exprimée sous forme locale. Soit  $\mathbf{f}$  la force par unité de volume

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial V} = \frac{i \mathbf{dl} \times \mathbf{B}}{A \partial l} = J \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial l} \times \mathbf{B} = \underbrace{J}_{\mathbf{J} // \partial \mathbf{l}} \times \mathbf{B} \quad 1.33$$

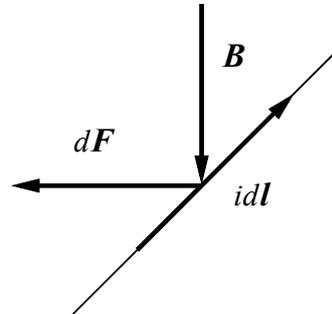


Figure 1-13 : Force exercée sur un conducteur traversé par un courant et soumis à un champ d'induction

### 1.9 FORCE ÉLECTROMOTRICE (TENSION INDUITE)

Soit un barreau se déplaçant dans un circuit champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  à la vitesse  $\mathbf{v}$ . Sous l'effet de deux forces antagonistes, les électrons libres vont se déplacer à l'extrémité du barreau en laissant des charges positives à l'autre extrémité.

Un état d'équilibre est rapidement atteint avec création à l'intérieur du barreau d'un champ électrique induit  $\mathbf{E}_{em}$ .

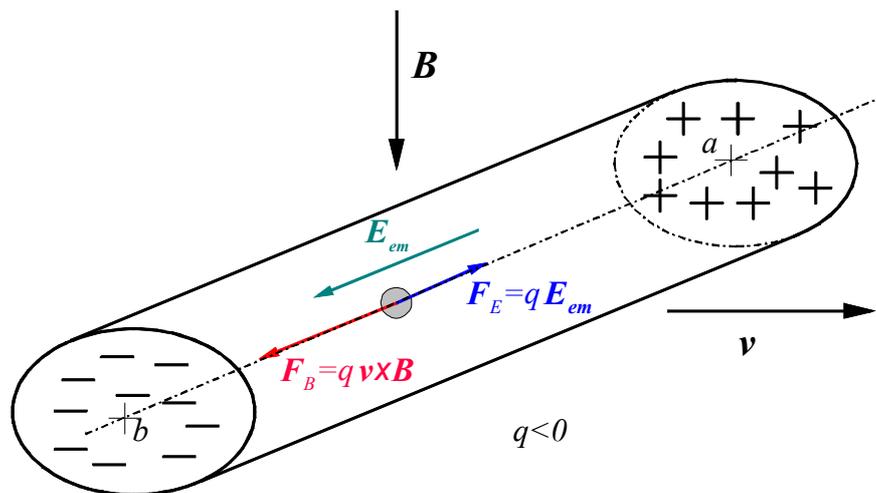


Figure 1-14 : Force électromotrice

A l'état d'équilibre :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_{em} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad 1.34$$

ou

$$\mathbf{E}_{em} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad 1.35$$

Et par conséquent

$$\mathbf{E}_{em} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad 1.36$$

La différence de potentiel électrique entre deux extrémités vaut

$$V_b - V_a = \int_a^b \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{l} = -\int_a^b \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad 1.37$$

Pour un champ  $\mathbf{B}$  uniforme entre a et b, on obtient

$$V_b - V_a = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \quad 1.38$$

## 1.10 CIRCUITS MAGNÉTIQUES

Cette section donne les relations de base sous forme globale d'un circuit magnétique. On peut ainsi définir des relations plus générales utilisables dans l'analyse des circuits électriques.

### 1.10.1 Tube d'induction magnétique

La première équation de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , mis sous une forme globale

$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dA = 0$  indique qu'il y a conservation du flux sur une surface fermée comme par exemple un tube d'induction magnétique (voir §1.6.2)

### 1.10.2 Potentiel magnétique scalaire

La seconde équation de Maxwell dans un milieu sans variation de charge d'espace

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  mis sous sa forme globale  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} dA$  peut être appliquée à un tube d'induction fermé sur lui-même. L'intégrale résultante représente le potentiel magnétique scalaire  $\Theta$  correspondant :

$$\Theta = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} dA \quad 1.39$$

Le potentiel magnétique ou solévation est donc le courant résultant créant le champ magnétique.

L'intégrale partielle entre deux sections extérieures d'un tube d'induction correspond à une différence de potentiel magnétique  $\Theta_{AB}$ .

$$\Theta_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad 1.40$$

De façon plus générale, elle dépend du parcours d'intégration.

### 1.10.3 Réductance magnétique

La relation 1.39, appliquée au tube d'induction partiel peut être développée comme suit :

$$\int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\mathbf{B}}{\mu} d\mathbf{l} \underbrace{=}_{1/A} \int_A^B \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{\mu A} d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\phi}{\mu A} d\mathbf{l} \quad 1.41$$

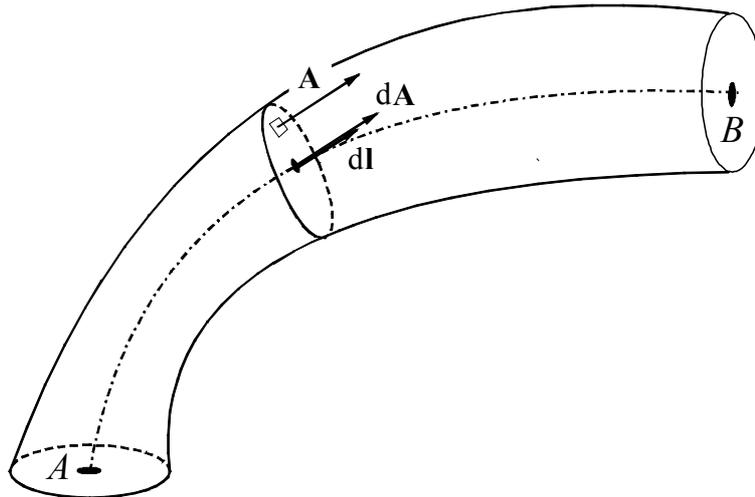


Figure 1-15 : Définition des vecteurs dans un tube d'induction

Vu le caractère conservatif du flux (un tube d'induction a ces parois parallèles au champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , on peut écrire

$$\Theta_{AB} = \phi \int_A^B \frac{dl}{\mu A} = \mathfrak{R}_m \phi \quad 1.42$$

La grandeur  $R_m$  est définie comme la réluctance magnétique associée au tube de flux d'induction. Cette relation introduit une proportionnalité entre flux d'induction et différence de potentiel magnétique scalaire associée à la réluctance du tube correspondant, La perméance magnétique est définie comme l'inverse de la réluctance.

$$\Lambda = \frac{1}{\mathfrak{R}_m} \quad 1.43$$

#### 1.10.4 Inductance propre

Pour un circuit électrique associé à un circuit magnétique linéaire donné par la Figure 1-16, on peut écrire

$$\phi = \Lambda \Theta = \Lambda Ni \quad 1.44$$

$$\psi = N^2 \Lambda i \quad 1.45$$

Par définition, l'inductance propre est le quotient du flux totalisé traversant un circuit électrique par le courant correspondant.

$$L = \frac{\psi}{i} = N^2 \Lambda \quad 1.46$$

$$\psi = Li \quad 1.47$$

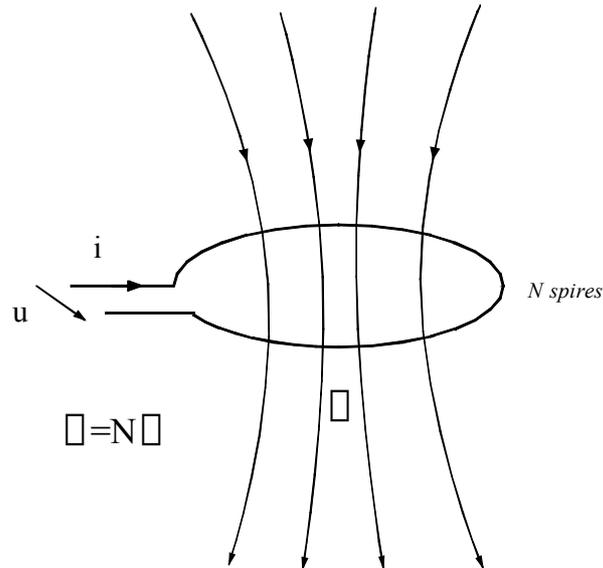


Figure 1-16 : Inductance propre d'une spire

### 1.10.5 Inductance mutuelle

Deux circuits électriques peuvent être placés de manière à avoir une partie commune du flux généré par leurs courants respectifs. On parle dans un tel cas de couplage magnétique des bobinages correspondants. Soit  $\phi_{21}$  le flux traversant la bobine 2, créée par le courant circulant dans la bobine 1. On peut écrire

$$\phi_{21} = \Lambda_{21} \Theta_1 = \Lambda_{21} N_1 i_1 \quad 1.48$$

$$\psi_{21} = N_2 \phi_{21} = N_1 N_2 \Lambda_{21} i_1 \quad 1.49$$

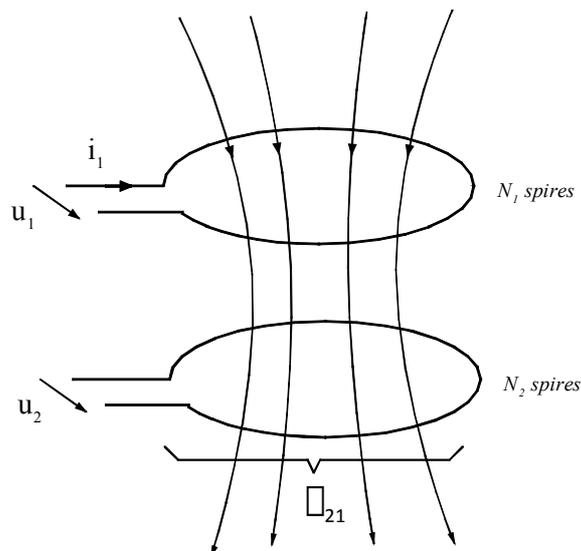


Figure 1-17 : Couplage entre circuits électriques

Par analogie avec le cas de l'inductance propre, l'inductance mutuelle  $L_{21}$  entre le circuit 1 et le circuit 2 est définie par le quotient du flux totalisé commun  $\psi_{12}$  généré par le courant  $i_1$  circulant dans le circuit 1.

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \Lambda_{21} \quad 1.50$$

Par l'unicité des lignes de champ magnétique, l'inductance mutuelle est réciproque.

$$\Lambda_{21} = \Lambda_{12} \quad 1.51$$

$$L_{21} = L_{12} \quad 1.52$$

La perméance commune  $\Lambda_{12}=\Lambda_{21}$  est dite perméance mutuelle.

De façon générale, le flux totalisé associé à un circuit j couplé magnétiquement avec k circuits s'écrit :

$$\psi_j = N_j \sum_{n=1}^k N_n \Lambda_{jn} i_n = \sum_{n=1}^k L_{jn} i_n \quad 1.53$$

Conventionnellement, la perméance  $\Lambda_{jj}$  est perméance mutuelle du circuit j sur lui-même, il s'agit donc de sa perméance propre.

## 1.11 CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Cette section donne les relations principales liées à un circuit électrique

### 1.11.1 Tension induite

La loi de la tension induite ( $\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E} dA = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dA$  : loi d'induction de Faraday)

caractérise la relation entre la tension et le courant associé à un circuit électrique. Elle se déduit de la relation

$$u_i = \frac{\partial(N\phi)}{\partial t} \quad 1.54$$

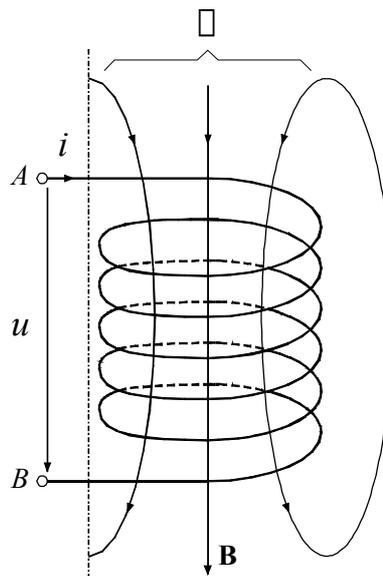


Figure 1-18 : Relation entre tension, courant et flux.

Le flux d'induction magnétique  $\phi$  est défini comme suit :

$$\phi = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dA \quad 1.55$$

Le contour de la surface S est défini, dans le cas particulier, par le circuit électrique lui-même, donc par le conducteur qui lui est associé.

### 1.11.2 Flux totalisé

Dans le cas d'un circuit magnétique associé à un circuit électrique, deux notions distinctes de flux d'induction magnétique peuvent être mises en évidence :

Le flux traversant le circuit magnétique :

$$\phi = \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dA \quad 1.56$$

La section  $S_m$  est celle du circuit magnétique

Le flux traversant le circuit électrique, formé de N spires

$$\psi = \int_{S_e} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dA \quad 1.57$$

La surface  $S_e$  est celle définie par le circuit électrique. Elle est délimitée par le conducteur correspondant.

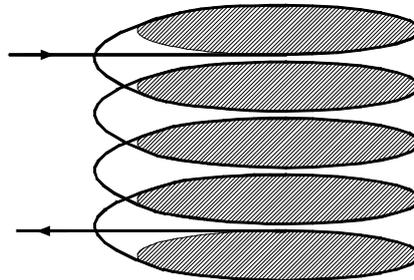


Figure 1-19 : Flux et flux totalisé dans une bobine de N spires

Le flux totalisé est le flux d'induction magnétique associé à un circuit électrique et délimité par celui-ci. Pour un circuit électrique formé de N spires concentriques au circuit magnétique, le flux totalisé est lié au flux d'induction magnétique par la relation

$$\psi = N\phi \quad 1.58$$

L'équation de la tension induite s'écrit alors

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad 1.59$$

### 1.11.3 Tension généralisée

Compte tenu des relations 1.53 et 1.59, l'équation de la tension dans un circuit j couplé avec k circuits électriques devient

$$\begin{aligned}
 u_j &= R_j i_j + \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \\
 &= R_j i_j + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^k L_{jn} i_n \\
 &= R_j i_j + \sum_{n=1}^k \left( \frac{\partial L_{jn}}{\partial t} i_n + L_{jn} \frac{\partial i_n}{\partial t} \right) = R_j i_j + \sum_{n=1}^k \left( \frac{\partial L_{jn}}{\partial i_n} i_n + L_{jn} \right) \frac{\partial i_n}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{1.60}$$

Il s'agit de la forme la plus générale de la tension.

#### 1.11.4 Circuits couplés

Deux circuits couplés définissent trois tubes d'induction :

- le tube d'induction commun aux deux circuits. Le flux qui le traverse est le flux de champ principal ou flux commun. Il est caractérisé par la grandeur  $h$  ;
- les deux tubes d'induction appartenant à un seul des circuits. Les flux associés sont les flux de fuite respectifs des deux circuits. Ils sont caractérisés par l'indice  $\sigma$ .

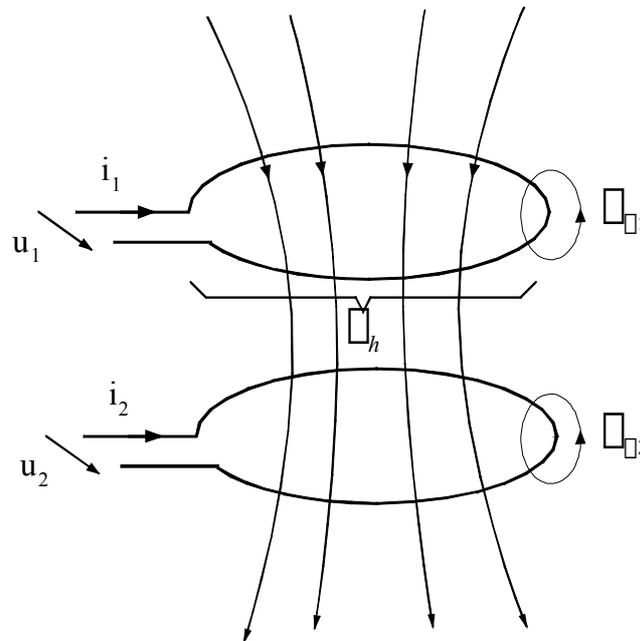


Figure 1-20 : Flux de fuite et flux de champ principal

On peut écrire

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \phi_h + \phi_{\sigma 1} \\
 \phi_2 &= \phi_h + \phi_{\sigma 2}
 \end{aligned}
 \tag{1.61}$$

A chacun de ces flux, on peut associer une perméance. En se basant sur la relation 1.53, on peut écrire :

$$\psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = (L_{1h} + L_{\sigma 1}) i_1 + L_{12} i_2
 \tag{1.62}$$

avec

$$L_{1h} = N_1^2 \Lambda_h \quad 1.63$$

$$L_{12} = N_1 N_2 \Lambda_h \quad 1.64$$

$$L_{\sigma 1} = N_1^2 \Lambda_{\sigma 1} \quad 1.65$$

et par conséquent

$$\psi_1 = N_1 (\Lambda_h (N_1 i_1 + N_2 i_2) + \Lambda_{\sigma 1} N_1 i_1) \quad 1.66$$

De même pour le flux totalisé dans le circuit 2

$$\psi_2 = N_2 (\Lambda_h (N_1 i_1 + N_2 i_2) + \Lambda_{\sigma 2} N_2 i_2) \quad 1.67$$

On voit, au travers des relations 1.66 et 1.67 des termes communs que l'on utilisera par la suite pour définir par exemple le courant magnétisant pour un circuit magnétique.

### 1.11.5 Coefficient de couplage et coefficient de dispersion

Dans le cas d'un système caractérisé par des flux de fuites nuls, on peut écrire

$$\Lambda_{\sigma 1} = \Lambda_{\sigma 2} = 0$$

$$L_{11} = N_1^2 \Lambda_h \quad 1.68$$

$$L_{12} = L_{21} = N_1 N_2 \Lambda_h \quad 1.69$$

$$L_{22} = N_2^2 \Lambda_h \quad 1.70$$

On en déduit la relation

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11} L_{22}} \quad 1.71$$

Dans le cas général (avec flux de fuite), on peut poser :

$$L_{12} = L_{21} < \sqrt{L_{11} L_{22}} \quad 1.72$$

Le coefficient de couplage est le quotient de l'inductance mutuelle par l'inductance correspondant à un couplage parfait

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} < 1 \quad 1.73$$

## 1.12 PROPRIÉTÉS DE LA MATIÈRE

### 1.12.1 Milieux magnétiques isotropes

#### 1.12.1.1 Relation entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ dans le vide

Nous avons déjà vu que dans le vide, le champ d'induction  $\mathbf{B}$  et le champ d'excitation  $\mathbf{H}$ , étaient colinéaires et liés par la relation  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide.

#### 1.12.1.2 Milieux magnétiques isotropes

Au sein d'un matériau, le champ d'excitation  $\mathbf{H}$  est toujours donné par le théorème d'Ampère. Sous le champ d'excitation  $\mathbf{H}$ , il va se produire une influence du milieu qui va se superposer au champ d'excitation pour produire le champ d'induction. On définit cette réaction à l'aide du vecteur d'aimantation  $\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad 1.74$$

Cette aimantation  $\mathbf{M}$  est proportionnelle au champ d'excitation et peut se mettre sous la forme  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$  où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique relative du matériau. Ainsi le champ d'induction résultant peut s'écrire sous la forme définie par la relation 1.74, avec  $\mu_r$  la perméabilité relative du matériau et

$$\mu_r = 1 + \chi \quad 1.75$$

On classifera les matériaux suivant la valeur de leur susceptibilité magnétique relative  $\chi$ .

### 1.12.2 Classification des milieux magnétiques

Les valeurs données ci-dessous sont valables à température ambiante.

#### 1.12.2.1 $\chi < 0$ : Milieux diamagnétiques

Le milieu diamagnétique est caractérisé par une susceptibilité magnétique relative  $\chi$  faible de valeur négative (de l'ordre de  $-10^{-9}$  à  $-10^{-5}$ ). Le champ d'aimantation  $\mathbf{M}$  est donc pratiquement nul.  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont de sens contraire. Ce type de matériau ne présente pas d'intérêt du point de vue magnétique.

<i>Matière</i>	<i>Susceptibilité <math>\chi</math></i>
Hydrogène (1 atm.)	$-2.1 \cdot 10^{-9}$
Azote (1 atm)	$-5.0 \cdot 10^{-9}$
Sodium	$-2.4 \cdot 10^{-6}$
Silicium (Si)	$-1.2 \cdot 10^{-6}$
Cuivre (Cu)	$-1.08 \cdot 10^{-6}$
Plomb (Pb)	$-1.4 \cdot 10^{-6}$
Bismuth	$-1.7 \cdot 10^{-5}$
Diamant	$-2.2 \cdot 10^{-5}$

Tableau 1-1 : Substance diamagnétique

### 1.12.2.2 $\chi > 0$ : Milieux paramagnétiques

Le paramagnétisme est caractérisé par une susceptibilité relative  $\chi$  positive de faible valeur (de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ ).  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{M}$  sont de sens identique. La polarisation qui résulte d'un champ magnétique est négligeable.

<i>Matière</i>	<i>Susceptibilité <math>\chi</math></i>
Oxygène (1 atm.)	$2.1 \cdot 10^{-6}$
Magnésium	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium (Al)	$2.3 \cdot 10^{-5}$
Tungstène (W)	$6.8 \cdot 10^{-6}$
Titane	$7.1 \cdot 10^{-5}$
Platine (Pt)	$3.0 \cdot 10^{-4}$

Tableau 1-2 : Substance diamagnétique

### 1.12.2.3 $\chi \gg 0$ : Milieux ferromagnétiques

Dans les milieux ferromagnétiques la susceptibilité  $\chi$  est grande. Ces matériaux sont essentiels pour l'électrotechnique. Ils se basent sur l'utilisation du Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages. La courbe de la Figure 1-21 donne un ordre de grandeur et l'évolution de la perméabilité relative pour trois matériaux ferromagnétiques en fonction du champ magnétique  $B$  qui les traversent.

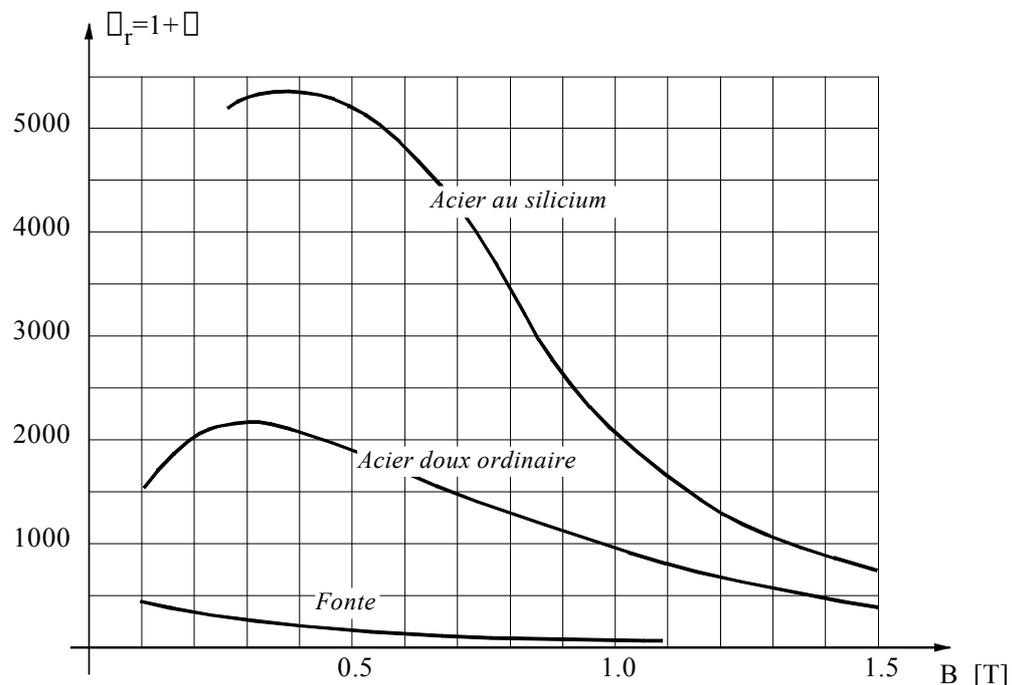


Figure 1-21 : Perméabilité relative  $\mu_r = 1 + \chi$  en fonction de  $B$  pour trois matériaux courants

Il est à noter que la valeur de la susceptibilité  $\chi$  dépend à la fois de la température mais surtout de la valeur du champ d'excitation qui est appliquée au matériau. Cela implique que la relation entre  $B$  et  $H$  peut non linéaire  $B = \mu(H) \cdot H$ . La Figure 1-22 résume le comportement des 3 catégories de matériaux.

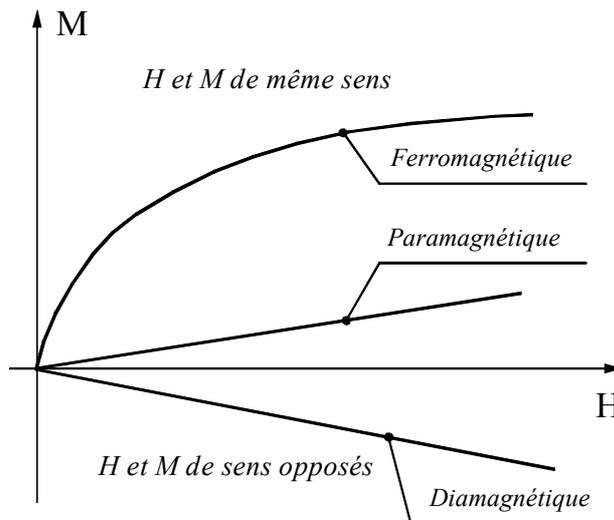


Figure 1-22 : Illustration des comportements magnétiques

### 1.12.3 Loi comportementale des milieux ferromagnétiques : courbes $B=f(H)$

#### 1.12.3.1 Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

Ces courbes montrent comment un corps ferromagnétique réagit à l'excitation magnétique  $H$  :

- **Courbe de première aimantation** : courbe  $B = f(H)$  lorsque le corps ferromagnétique ne possède aucune aimantation.
- **Cycle d'hystérésis** : courbe  $B = f(H)$  lorsque le corps ferromagnétique possède déjà une aimantation.

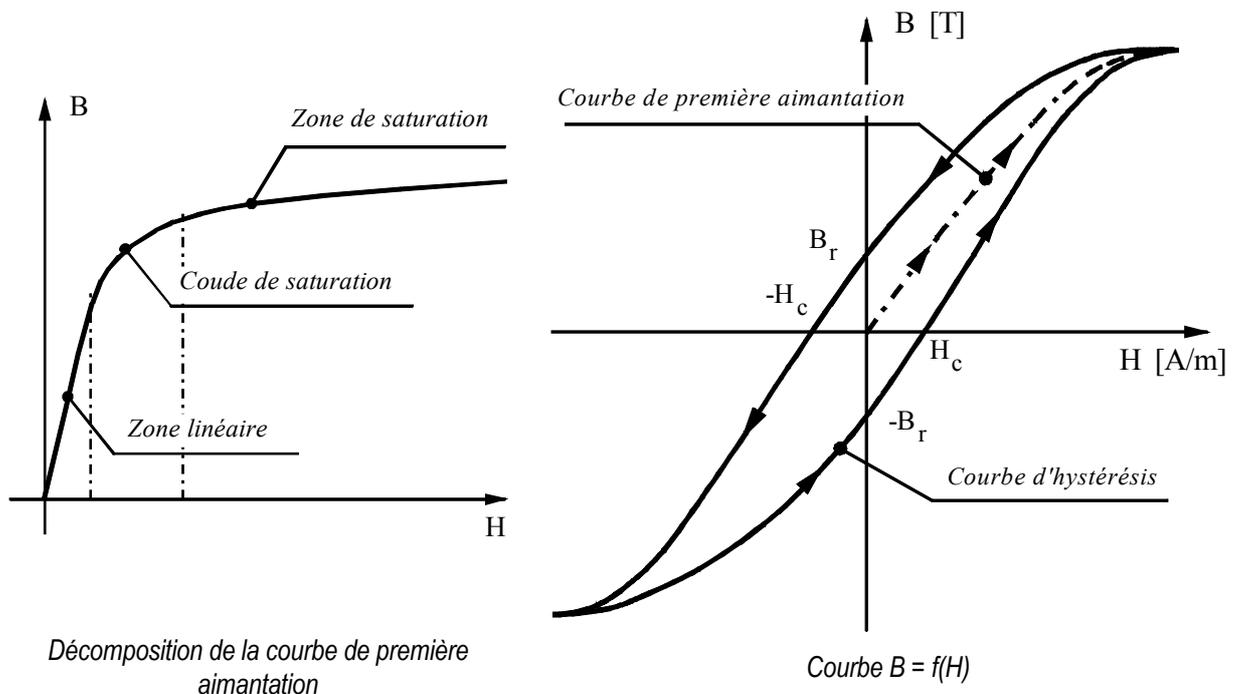


Figure 1-23 : Caractéristique de matériau ferromagnétique

On définit plusieurs zones dans la courbe  $B=f(H)$ .

- Zone linéaire** : Dans cette zone,  $B = \mu.H$  avec  $\mu$  constante. C'est cette zone qui est généralement exploitée pour les transformateurs et les machines tournantes.
- Saturation du milieu ferromagnétique** : Lorsque  $H$  devient trop grand,  $B$  ne varie presque plus. Le matériau magnétique est dit saturé. On a toujours  $B = \mu.H$ , mais  $\mu$  n'est plus constant (« il s'écroule »).  $B$  tend vers le champ de saturation  $B_{sat}$ .
- Champ rémanent  $B_r$**  : Champ qui subsiste lorsque  $H = 0$  ( $i = 0$ ).
- Excitation coercitive  $H_c$**  : Excitation  $H$  nécessaire pour annuler le champ rémanent  $B_r$ .
- Hystérésis** : C'est le dédoublement de la caractéristique  $B(H)$  du matériau magnétique. *Donc  $B$  dépend non seulement de  $H$ , mais aussi de l'aimantation antérieure.* Les substances ferromagnétiques sont donc douées de mémoire.

Le cycle d'hystérésis a pour conséquence qu'il subsiste une induction rémanente  $B_r$  lorsque l'on annule l'excitation. Si l'on souhaite annuler  $B$ , il faut inverser le champ d'excitation  $H$ , on appelle la valeur de ce champ le champ coercitif  $H_c$ . La Figure 1-24 montre l'évolution de la courbe  $B=f(H)$  pour différentes amplitudes d'excitation.

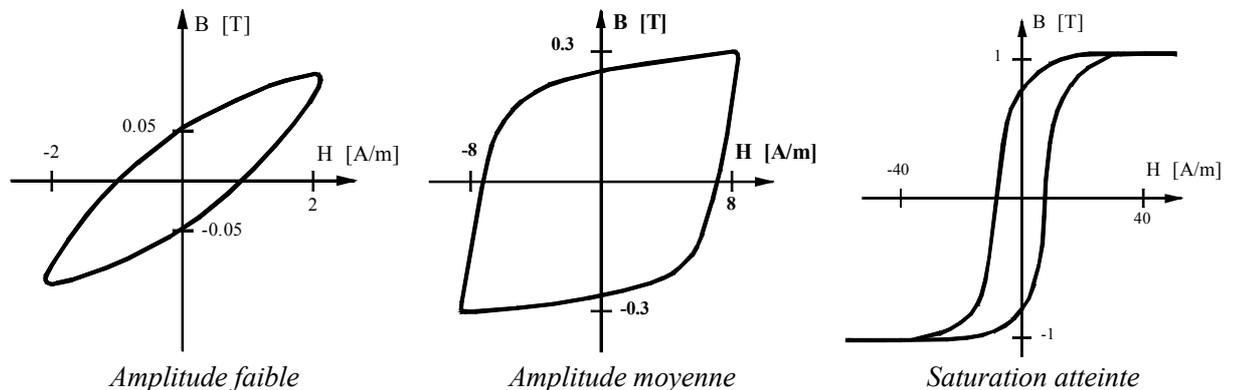


Figure 1-24 : Cycle d'hystérésis du même matériau pour différentes amplitudes de l'induction

#### 1.12.4 Classification des matériaux ferromagnétiques

On sépare les matériaux magnétiques en deux familles qui se distinguent par leur courbe  $B=f(H)$ .

##### 1.12.4.1 Matériaux durs

Les matériaux durs sont des matériaux qui présentent une forte aimantation rémanente et difficile à annuler ( $H_c$  est grand). Ils sont utilisés pour faire des aimants permanents (ex : acier). Ce sont des matériaux qui présentent un cycle d'hystérésis très large ( $10^4 \text{ A/m} < H_c < 10^6 \text{ A/m}$ ). Ils sont utilisés en général comme aimant. On les utilise dans le 2<sup>ème</sup> quadrant ( $B > 0$  et  $H < 0$ ).  $H_c$  devient alors le champ démagnétisant à ne pas dépasser.

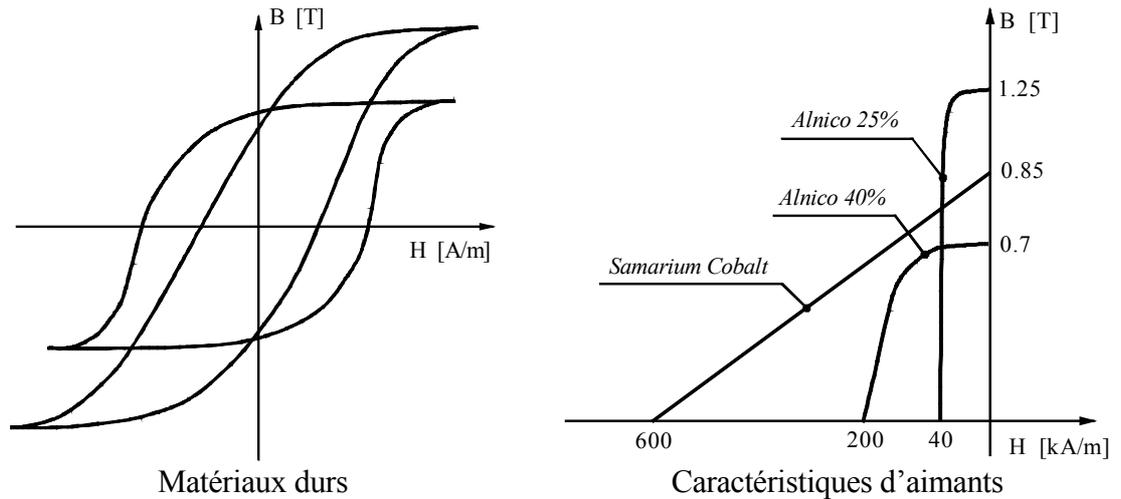


Figure 1-25 : Caractéristiques magnétiques BH

Exemples d'alliages utilisés pour les aimants.

<i>Ferrite (oxyde de fer)</i>	<i>Samarium-Cobalt (Sm-Co)</i>
Saturation à $B_{sat} \approx 0.6$ T	Saturation à $B_{sat} \approx 1$ T
$B_r \approx 0,4$ T ; $H_C \approx 200$ kA/m	$B_r \approx 0,8$ T ; $H_C \approx 500$ kA/m

1.12.4.2 Matériaux doux

Les matériaux doux sont des matériaux qui possèdent une aimantation rémanente facile à annuler ( $H_C$  est petit). A l'opposé des matériaux durs, un matériau doux présente un cycle d'hystérésis très petit voir inexistant ( $1 \cdot 10^{-2}$  A/m  $< H_C < 100$  A/m). C'est la base des machines tournantes ou de tout système magnétique voyant une induction alternative ( $\mu_r$  dans la zone linéaire : 50 à  $10^4$ ).

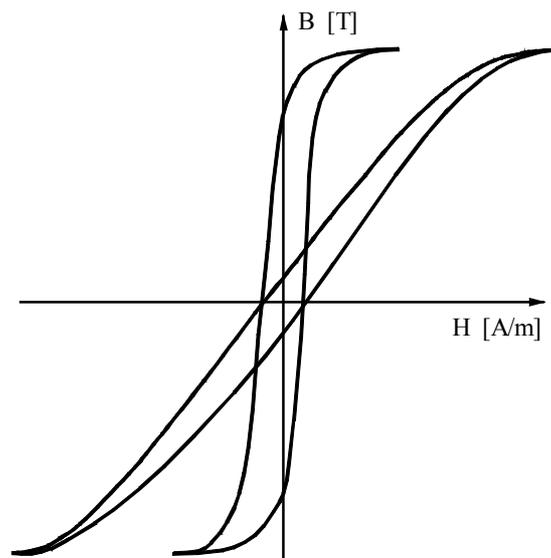


Figure 1-26 : Matériaux doux

Ils sont réalisés à base de Fer. En fonction de l'alliage utilisée, on trouve différente valeur de champ de saturation  $B_{sat}$  :

<b>Fe</b>	:	$B_{sat} \rightarrow 2.2T$	
<b>FeSi</b>	:	$B_{sat} \rightarrow 1.8T$	<i>Bonne tenue mécanique (Moteur, transformateur)</i>
<b>FeCo</b>	:	$B_{sat} \rightarrow 2.4T$	<i>Faibles pertes, cher !!</i>
<b>Céramique</b>	:	$B_{sat} \rightarrow 0.5T$	<i>Très faibles pertes (H.F.)</i>
<b>FeNi</b>	:	$B_{sat} \rightarrow 1,3T$	<i>Faible <math>H_C</math> (Alimentation à découpage)</i>

Exemples d'alliages utilisés pour les tôles des transformateurs

#### ***FeSi 3.5% de Si***

Saturation à  $B_{sat} \cong 2T$   
 Induction rémanente  $B_r \cong 0$   
 Champ coercitif  $H_C \cong 0$   
 Perméabilité relative  $\mu_r = 7000 @ 50Hz$

#### ***FeSi à grains orientés***

Saturation à  $B_{sat} \cong 3T$   
 Induction rémanente  $B_r \cong 1.4T$   
 Champ coercitif  $H_C \cong 8A/m$   
 Perméabilité relative  $\mu_r > 40'000 @ 50Hz$

Toute variation d'induction dans une matière magnétique génère des pertes sous forme d'échauffement. On distingue les pertes par hystérésis, par courant de Foucault et des pertes résiduelles ou par traînage dues au retard du champ l'induction magnétique (B) par rapport au champ magnétique (H).

Les pertes par hystérésis sont proportionnelles à la surface du cycle et donc à la fréquence de parcours, pour une valeur  $B_{max}$  donnée.

Les pertes par courants de Foucault résultent des courants créés dans la matière conductrice par un flux variable dans le temps.

Pour réduire les pertes par hystérésis, il faut agir sur la composition des alliages et le contrôle des impuretés, tout en procédant parfois à des traitements thermiques appropriés. On vise un cycle le plus étroit possible et une perméabilité maximum si l'on veut conduire le flux sur un parcours donné avec un rendement maximum.

Le fer ordinaire ou fer doux a des propriétés moyennes dans ce domaine, en raison des impuretés qu'il contient ( $\mu_{rmax} = 5000$ , pertes 10 à 12 W/Kg à 1.5T et 50Hz). Sa purification (fer pur Armco), associée à un traitement coûteux, à haute température en atmosphère d'hydrogène, apporte des améliorations spectaculaires ( $(\mu_{rmax} > 10^5)$ ) tout en réduisant les caractéristiques mécaniques.

La perméabilité relative  $\mu_r$  peut être augmentée par adjonction de quelques % de silicium. Le champ coercitif  $H_C$  diminue considérablement et la résistivité augmente. La baisse de 10% à 20% de l'induction de saturation est largement compensée par la diminution des pertes.

Il existe toute une série d'alliages de Fe-Ni présentant, selon le taux de Ni (env. 30% à 80%), les traitements thermiques et mécaniques appliqués, des perméabilités relatives  $\mu_r$  très élevées, des champs coercitifs minimum, etc ... On pense notamment à des alliages spéciaux à base de Cobalt, aux ferrites à haute perméabilité et à faibles pertes à haute fréquence utilisées en électronique.

Dans d'autres applications ou types de moteurs, on a à faire à des flux constants. Le problème des pertes est alors tout différent et on peut employer un matériau magnétique massif ; c'est le cas pour certains moteurs à courant continu.

## **1.12.5 Pertes dans la matière**

### *1.12.5.1 Energie magnétisante*

Pour obtenir un champ magnétique au sein d'un matériau, cela nécessite l'apport d'une énergie W dite magnétisante. Elle est proportionnelle au volume du matériau :

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \int_0^B H dB \quad [J / m^3] \quad 1.76$$

L'énergie stockable dans un milieu de perméabilité  $\mu$  (caractéristique linéaire) est:

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH \quad [J / m^3] \quad 1.77$$

Ainsi dans le cas d'un circuit avec un entrefer, l'essentiel de l'énergie viendra se placer dans celui-ci. Les matériaux magnétiques ont un rôle essentiellement de circuit de transit. Un transformateur n'aura pas d'entrefer, alors qu'une inductance aura très certainement un entrefer pour faire office de stockage d'énergie afin de ne pas saturer le circuit.

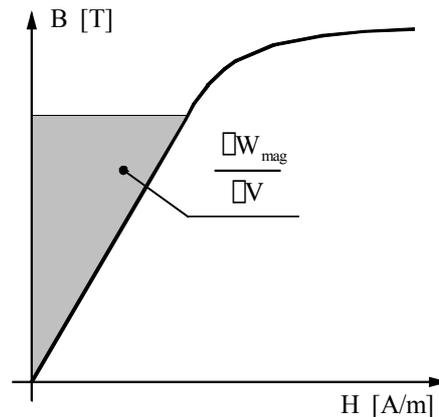


Figure 1-27 : Energie magnétique emmagasinée dans un matériau

#### 1.12.5.2 Pertes par hystérésis

Ce type de pertes est lié au cycle d'hystérésis du matériau. Le parcours du cycle B(H) fait apparaître une perte d'énergie qui correspond alors à un échauffement de la matière. Les pertes par hystérésis sont donc proportionnelles à la fréquence et sont liées à la structure du matériau.

$$P_h = \alpha B_M^2 f \quad 1.78$$

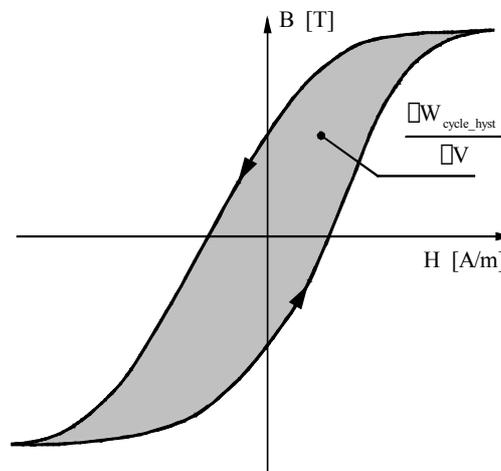


Figure 1-28 : Pertes par hystérésis

Dans le cadre de transformateur, on utilise des matériaux doux pour cette simple raison.

### 1.12.5.3 Pertes par courants de Foucault

Les variations du champ magnétique dans la matière génèrent par induction des courants induits qui se rebouclent sur eux-mêmes. Il y a donc échauffement par effet joule. Cette fois-ci ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence.

$$P_f = \beta B_M^2 f^2 \quad 1.79$$

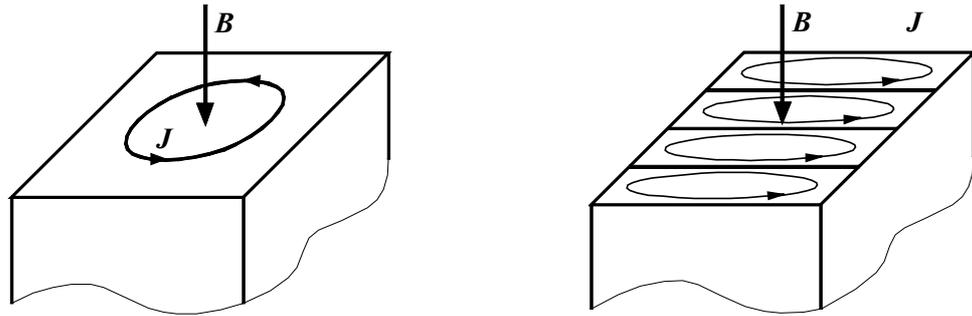


Figure 1-29 : Pertes par courant de Foucault

Afin de les limiter, on cherche à réduire le parcours des courants induits, c'est pour cette raison que l'on utilise des circuits magnétiques feuilletés isolés.

### 1.12.6 Circuits magnétiques

Ils sont basés sur l'utilisation de matériaux ferromagnétiques avec comme but d'obtenir un champ d'induction B dans une zone précise (entrefer). Pour ce faire, on crée un champ d'excitation H à l'aide de bobinage puis on le canalise vers la zone d'utilisation (entrefer).

#### 1.12.6.1 Constitution

On peut résumer un circuit magnétique à cette géométrie

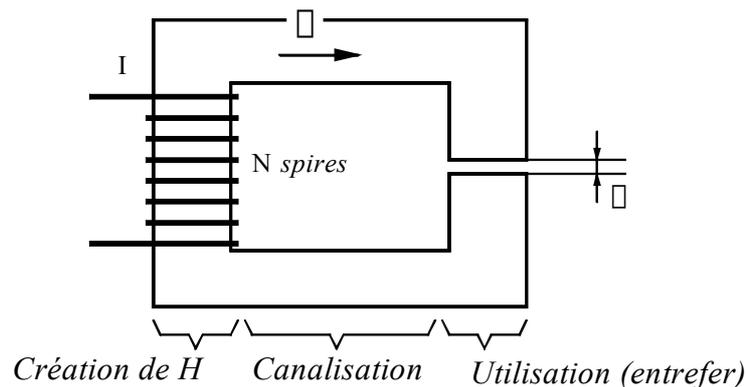


Figure 1-30 : Circuit magnétique classique

On retrouve trois éléments :

1. le bobinage qui génère l'excitation et donc le champ ;
2. la culasse qui dirige le champ H vers la zone utile. La culasse **impose** le parcours du champ magnétique de part sa grande perméabilité par rapport à l'air. Le matériau qui compose la « culasse » se comporte comme un tube de champ ;

3. l'entrefer où l'on souhaite utiliser le champ. L'entrefer est la zone d'interaction avec l'extérieur.

### 1.12.6.2 Mise en équation : cas parfait

La mise en équation se base sur les trois lois fondamentales que nous avons établies :

#### Conservation du Flux – Théorème d'Ampère – Loi des matériaux

Dans le cas parfait, le circuit magnétique se confond avec un tube de champ. Tout le flux est canalisé par le circuit. De plus, il a un comportement linéaire en tout point :  $B = \mu H$  ( $\mu = \mu_0 \mu_r$ ). Il en est de même dans l'entrefer :  $B = \mu_0 H$ .

#### 1.12.6.2.1 Exemple de calcul

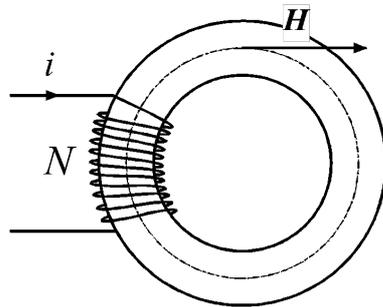
##### 1.12.6.2.1.1 Cas d'un circuit magnétique sans entrefer

D'après le théorème d'Ampère

$$HL = NI \quad 1.80$$

La valeur du champ magnétique est donc :

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{L} \quad 1.81$$



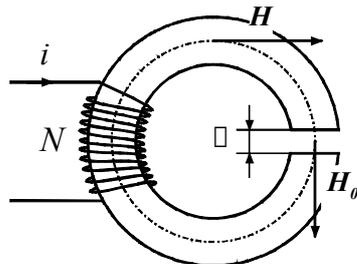
L : longueur moyenne des lignes de champ [m]  
 ( $L = 2\pi R$ )  
 N : nombre de spires de la bobine  
 I : courant dans la bobine [A]  
 H : excitation magnétique [A/m]

Figure 1-31 : Circuit magnétique (Tore) sans entrefer

##### 1.12.6.2.2 Circuit magnétique avec entrefer

D'après le théorème d'Ampère

$$H(L - \delta) + H_0 \delta = NI \quad 1.82$$



L : longueur moyenne des lignes de champ [m]  
 $\delta$  : longueur de l'entrefer [m]  
 N : nombre de spires de la bobine  
 I : courant dans la bobine [A]  
 H : excitation magnétique dans la matière [A/m]  
 $H_0$  : excitation magnétique dans l'entrefer [A/m]

Figure 1-32 : Circuit magnétique (Tore) avec entrefer

En considérant le circuit magnétique parfait, on peut considérer que les lignes de champ restent dans l'alignement du matériau magnétique.

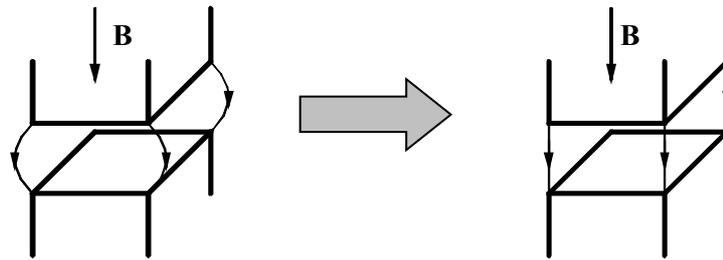


Figure 1-33 : Hypothèse simplificatrice sur les lignes de champ

De plus, si  $\delta \ll L$ , les lignes de champs traversent l'entrefer sans trop de perte. Loi de conservation du flux :

$$\Rightarrow B_{mat} = B_{\delta} \Rightarrow \mu_0 \mu_r H = \mu_0 H_0 \Rightarrow \mu_r H = H_0$$

$\mu_r \approx 1000$  pour du fer.  $H_0$  est 1000 fois plus important que  $H$ . Donc si l'on a besoin d'une excitation donnée dans l'entrefer, on peut calculer le courant qui sera nécessaire. Celui-ci sera d'autant plus faible que  $\mu_r$  sera grand. On en déduit la valeur du champ magnétique dans l'entrefer :

$$B_{\delta} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{L - \delta}{\mu_r} + \delta} \tag{1.83}$$

### 1.12.7 Réductance – Loi d’Hopkinson

#### 1.12.7.1 Force magnétomotrice

De manière à simplifier l'étude des circuits magnétiques on définit  $F_{MM}$ , la force magnétomotrice, à partir du théorème d’Ampère

$$F_{MM} = NI = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.84}$$

Le sens de cette force magnétomotrice est donné par la méthode du tire-bouchon en rapport avec le sens de parcours de  $C$ .

#### 1.12.7.2 Réductance

De même, en tenant compte de la loi constitutive du matériau, on peut établir en tout point  $M$  du parcours  $C$ .

$$\mathbf{H}_M = \frac{\mathbf{B}_M}{\mu_M} \tag{1.85}$$

On peut alors exprimer le théorème d’Ampère sous la forme (on suppose  $B$  et  $dl$  colinéaires) :

$$NI = \oint_C \frac{\mathbf{B}_M}{\mu_M} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{B_M}{\mu_M} \cdot dl = \oint_C \frac{\Phi_M}{\mu_M S_M} \cdot dl = \Phi_M \oint_C \frac{dl}{\mu_M S_M} \tag{1.86}$$

On définit la réductance  $\mathfrak{R}$  :

$$\mathfrak{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu_M S_M} \tag{1.87}$$

Ainsi, un barreau de longueur L, de section S et perméabilité  $\mu$  aura une réluctance :

$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S} \tag{1.88}$$

La réluctance dépend de la géométrie du circuit magnétique. Elle peut varier avec l'intensité du champ par l'intermédiaire de  $\mu_r$ .

### 1.12.7.3 Loi d'Hopkinson

En combinant la force magnétomotrice à la réluctance, on obtient alors la relation d'Hopkinson :

$$F_{MM} = NI = \mathfrak{R}\Phi \tag{1.89}$$

La réluctance ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit. La force magnétomotrice  $F_{MM}$  représente l'excitation qui va générer le flux au sein du circuit mais est indépendante de sa géométrie.

On est donc typiquement dans le cas analogue du générateur de tension que l'on connecte à une résistance ce qui va engendrer un courant I.

$$U = RI \xleftrightarrow{\text{analogie}} F_{MM} = \mathfrak{R}\Phi \tag{1.90}$$

### 1.12.8 Analogie magnétique – Electrique

L'observation des relations d'Hopkinson permet d'effectuer une analogie avec les circuits électriques linéaires

A tout circuit magnétique, on peut affecter une représentation électrique permettant d'étudier le comportement du circuit à l'aide de relations électriques.

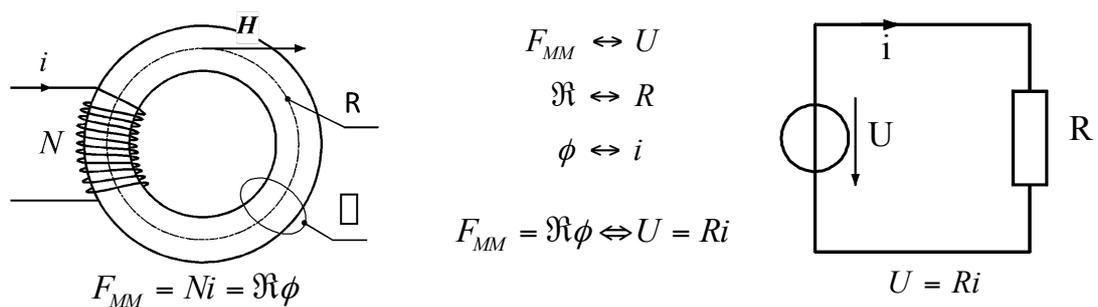


Figure 1-34 : Analogie magnétique - électrique

Le Tableau 1-3 résume l'analogie Magnétique/Electrique

<i>Grandeurs magnétiques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
force magnétomotrice	: $F_{MM} = NI$ [A]	force électromotrice	: $U$ [V]
flux d'induction	: $\Phi$ [Wb]	Courant électrique	: $I$ [A]
Réluctance	: $\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{L}{S}$	Résistance	: $R = \rho \frac{L}{S}$

<i>Grandeurs magnétiques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
ddp magnétique	: $F_{MM} = \mathcal{R}\Phi$	ddp électrique	: $U = RI$
maille magnétique	: $\sum_{Maille} F_{MM}$	Maille électrique	: $\sum_{Maille} U$
nœud magnétique	: $\sum_{Noeud} \Phi$	nœud électrique	: $\sum_{Noeud} I$

Tableau 1-3 : Analogie Magnétique ↔ Electrique

Remarque :

Plus la réluctance d'un circuit est faible ( $\mu_r$  grand), plus il « attirera » le flux. Un circuit à forte perméabilité canaliser le flux et se comportera comme un tube de champ.

1.12.8.1 Exemples d'applications de l'analogie par schéma équivalent

1.12.8.1.1.1 Circuit avec entrefer

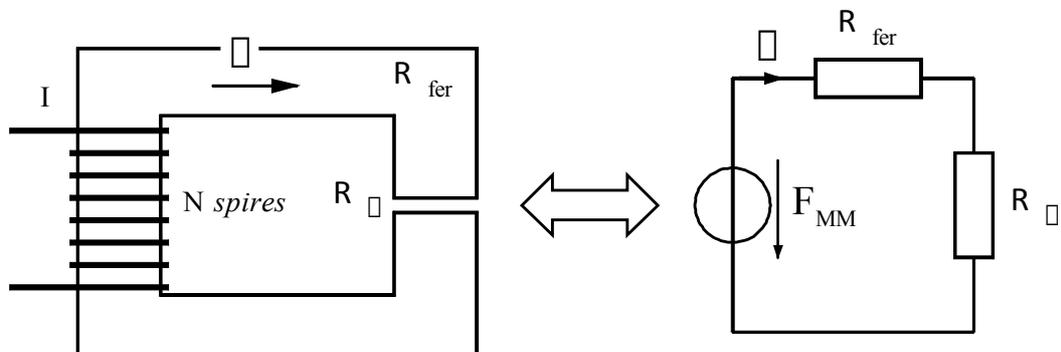


Figure 1-35 : Circuit à une maille

1.12.8.1.1.2 Circuit avec deux tronçons

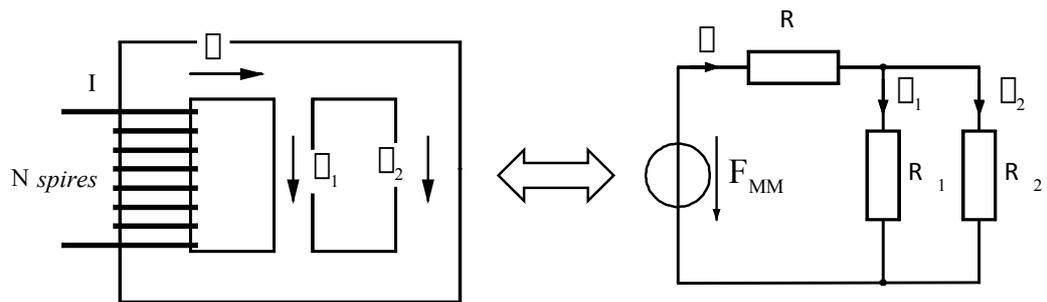


Figure 1-36 : Circuit à deux mailles

1.12.9 Calcul de l'inductance propre d'un circuit

L'inductance d'un circuit est définie par le rapport entre la variation de flux vu par le bobinage (composé de N spires) divisé par la variation du courant d'excitation

$$L = \frac{\partial \psi}{\partial i} = \frac{\partial N\phi}{\partial i} = N \frac{\partial \phi}{\partial i} \tag{1.91}$$

avec

$$\phi = \frac{Ni}{\mathfrak{R}} \quad 1.92$$

et par conséquent

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad 1.93$$

Tout comme la réluctance, une inductance peut varier avec l'intensité du champ donc du courant.

## 1.13 LES AIMANTS

### 1.13.1 Première aimantation, désaimantation

Si l'on veut obtenir, pour un aimant permanent ses caractéristiques nominales, l'aimantation à saturation est absolument nécessaire. Le champ minimum d'aimantation est indiqué par le fabricant; il dépend naturellement de la nature de l'aimant et doit être considéré dans tout développement car certains matériaux ne peuvent être complètement saturés qu'avec des champs magnétisants supérieurs à 10'000KA/m ( $10^7$  A/m).

Les aimants à grande énergie spécifique sont très difficiles, voire impossibles à désaimanter, en raison même de leur caractéristique M(H).

La solution consiste en ce cas à chauffer l'aimant au-dessus de son point de Curie. Mais ceci n'est possible qu'avec certains matériaux; il faut s'assurer que l'échauffement ne produise pas de modification de la structure moléculaire ou granulaire.

Par exemple, des aimants dont le point de Curie se situe à environ 720°C ne permettent pas cette opération, car les modifications de phase qui se produisent alors peuvent détruire les propriétés d'aimantation permanente.

L'utilisateur doit donc savoir que certains aimants permanents, une fois aimantés, ne peuvent plus jamais être désaimantés

### 1.13.2 Cycle d'hystérésis et température

Le comportement d'un aimant permanent est décrit par sa caractéristique  $B = \mu_d H + \mu_d M$  où  $\mu_d$  est la perméabilité interne de l'aimant  $\mu_d = 1.05\mu_0 \dots 3.5\mu_0$

Le 1<sup>er</sup> quadrant du cycle d'hystérésis décrit la faculté d'aimantation du matériau, avec la courbe de première aimantation en pointillé.

Lorsque tous les moments magnétiques sont orientés parallèlement au champ magnétique externe, M(H) atteint sa valeur maximale ou de saturation  $M_S$ ; ensuite, l'induction B continue à croître proportionnellement à H.

$H_S$ , champ de saturation, est le champ minimum nécessaire pour garantir la saturation.

On note en passant que les aimants à base de terres rares ont une induction rémanente environ égale à l'induction de polarisation à saturation,  $M : B_r \cong M_S$ .

Le 2<sup>ème</sup> quadrant du cycle d'hystérésis décrit la courbe de désaimantation, dont les deux points extrêmes sont la rémanence  $B_r$  et le champ coercitif  $H_C$ , champ pour lequel la densité de flux s'annule -  $B_{H_C}$  - ou pour lequel l'aimantation M s'annule -  $J_{H_C}$  -.

Sur la courbe de démagnétisation B(H) - 2<sup>ème</sup> quadrant - le produit BH varie pour passer par une valeur maximale entre  $B_r$  et  $H_C$ .

La connaissance de la courbe de désaimantation est importante puisque la réversibilité n'est obtenue que sur la partie rectiligne de cette courbe, c'est-à-dire à droite du coude. Cela s'explique en observant M(H).

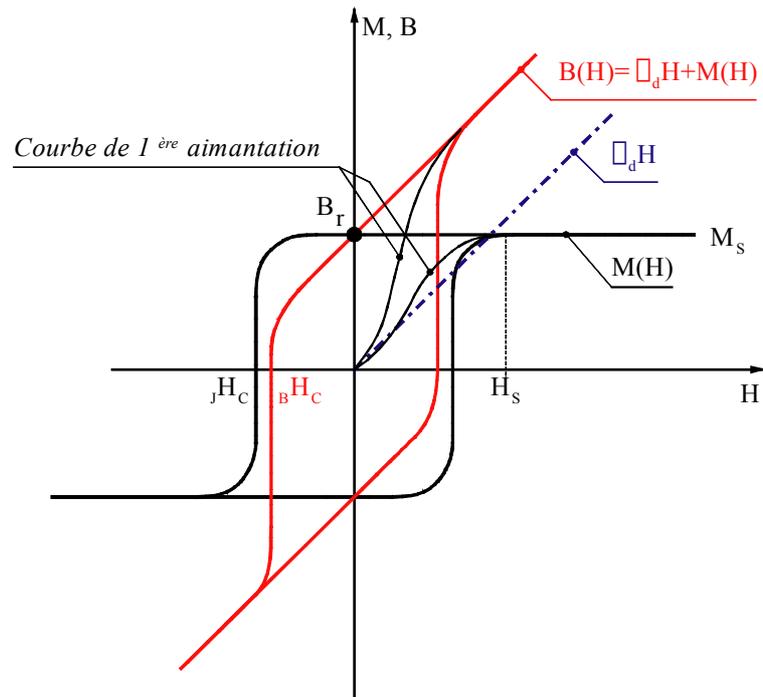


Figure 1-37 : Courbe B-H d'un aimant permanent

Une élévation de température provoque en général une légère baisse d'induction rémanente, et parallèlement une diminution du champ coercitif. Celle-ci a pour effet de déplacer le coude vers la droite comme le montre la Figure 1-38

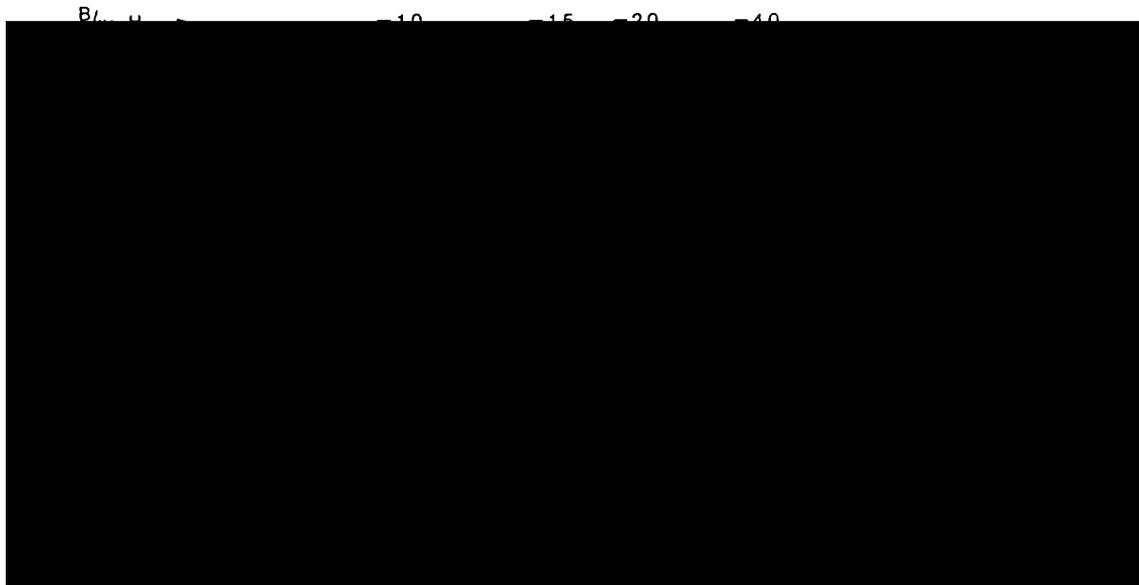


Figure 1-38 : Courbe B-H d'un aimant Vacodym

***Il est impératif que le point de fonctionnement reste en tout temps sur la partie linéaire (réversible) de la caractéristique de désaimantation pour tout le domaine de température à envisager.***

### 1.13.3 Caractéristiques d'aimants de diverses natures

L'aimant permanent est une source de flux magnétique et ne se conçoit par conséquent que dans un circuit magnétique. L'aimant permanent n'étant pas destiné à être désaimanté, on ne s'intéresse pas à tout le cycle d'hystérésis de la courbe d'aimantation, mais seulement au deuxième quadrant de cette courbe, qui caractérise le comportement de l'aimant, une fois aimanté, dans son circuit magnétique. On l'appelle la courbe de désaimantation. On ne parle pas non plus de pertes, avec la surface sous le cycle d'hystérésis mais d'énergie spécifique (volumique), exprimée par le produit  $B \cdot H$

Le long de la courbe de désaimantation, ce produit passe par une valeur maximum qui est une des caractéristiques très importantes de tout aimant permanent. Celles-ci sont

- la rémanence :  $B_r$  [T]
- le champ coercitif :  $H_C$  [A]
- le produit d'énergie :  $B \cdot H_{[max]}$  [ $J/m^3$ ]

Il existe une grande diversité de courbes de désaimantation selon les alliages ou les poudres utilisées, et selon les traitements thermiques appliqués. Comme exemple, la Figure 1-39 montre l'effet d'un traitement thermique en présence de champ magnétique sur un alliage isotrope (2) respectivement sur un alliage à structure granulaire orientée (3)

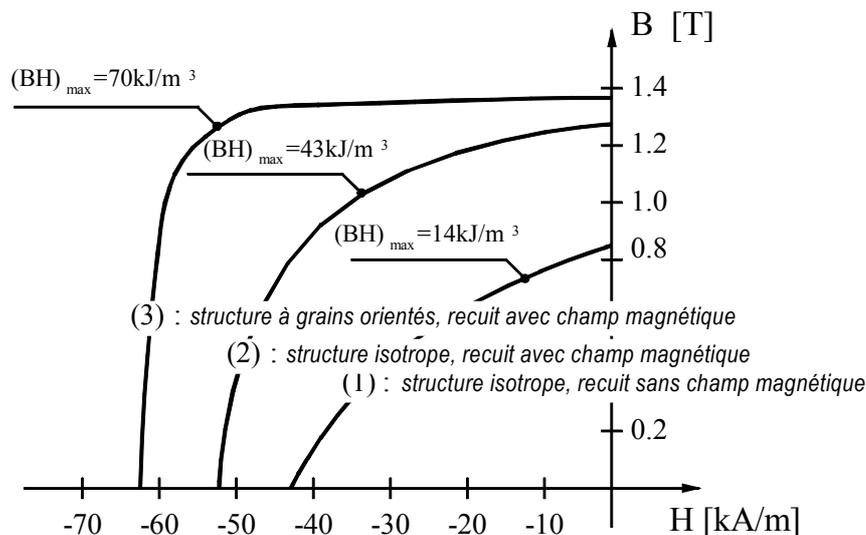


Figure 1-39 : Courbe B-H d'un alliage Alnico

Lorsqu'on considère les courbes de désaimantation - véritables cartes d'identité des aimants permanents - on observe des catégories très distinctes :

- les alliages métalliques type Al-Ni-Co de rémanence élevée et de champ coercitif faible ;
- les ferrites à base d'oxyde de Ba, de rémanence nettement plus faible mais de champ coercitif élevé ;
- les alliages à base de PtCo, qui possèdent des performances supérieures aux ferrites, mais d'applications limitées en raison du coût élevé et variable du Pt ;

- les alliages ou poudres frittées à base de terres rares (SmCo) qui ont passablement révolutionné la conception des circuits magnétiques en raison de leur énergie spécifique comparativement très élevée (SmCo.5, SmCo.17) ;
- les aimants Néodyme.

La Figure 1-40 donne à titre comparatif les courbes pour différents types d'aimants. Les aimants les plus performants sont tous anisotropes, c'est-à-dire qu'ils ont une direction d'aimantation privilégiée. Le meilleur matériau à ce jour en ce qui concerne l'énergie spécifique -  $BH_{\max}$  - est à base de NdFeB, obtenu à partir de lingots frittés de manière isostatique ou en présence d'un champ transversal.

Différentes nuances sont proposées avec des températures d'utilisations plus ou moins élevées. On atteint des  $BH_{\max} > 200\text{KJ/m}^3$  avec  $B_r > 1\text{T}$ .

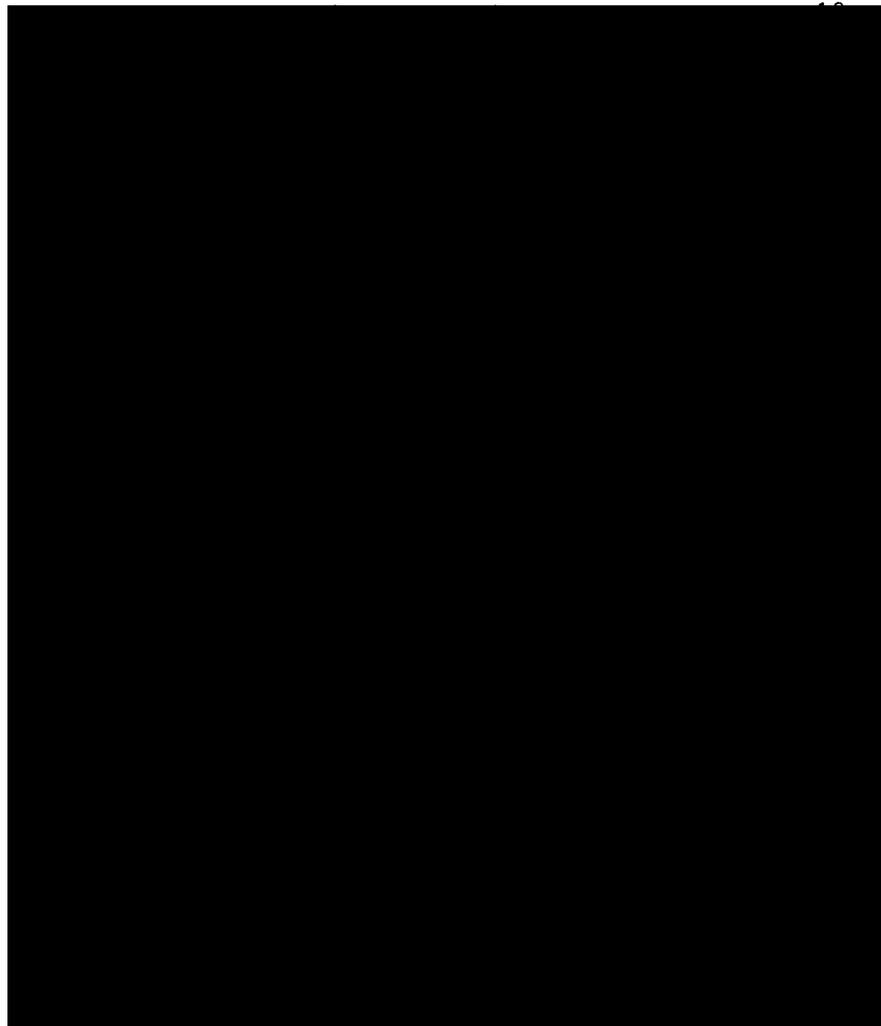


Figure 1-40 : Courbe de désaimantation

### 1.13.4 Droite de recul et point de travail

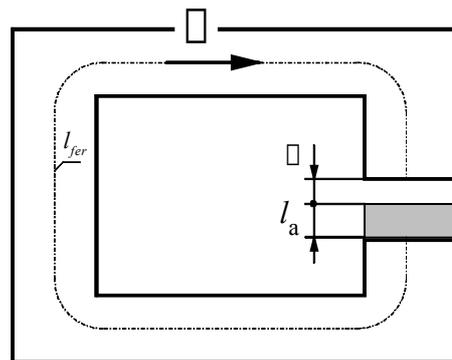
#### 1.13.4.1 Droite de charge

Considérons un circuit magnétique dans lequel est inséré un aimant permanent. Le théorème d'Ampère permet d'écrire, sur un contour fermé :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i \quad 1.94$$

Appliqué à un circuit passif dans lequel on fait l'hypothèse, d'une absence de saturation, on a  $\sum i = 0$  ;

$$H_a l_a + \frac{B_{fer}}{\mu_0 \mu_r} l_{fer} + \frac{B_\delta}{\mu_0} \delta = 0 \quad 1.95$$



$l_{fer}$  : longueur moyenne dans le fer  
 $\delta$  : longueur dans l'air (entrefer)  
 $l_a$  : épaisseur de l'aimant

Figure 1-41 : Circuit passif avec aimant

En admettant les flux de fuites négligeables, la densité de flux est la même sur tout le parcours, donc :

$$B_{fer} S_{fer} = B_\delta S_\delta = B_a S_a \quad 1.96$$

d'où

$$\left( \frac{H_a}{B_a} \right) = - \frac{S_a}{l_a} \left( \frac{l_{fer}}{\mu_0 \mu_r S_{fer}} + \frac{\delta}{\mu_0 S_\delta} \right) = - \frac{S_a}{l_a} \left( \frac{1}{\Lambda_{fer}} + \frac{1}{\Lambda_\delta} \right) \quad 1.97$$

L'expression  $\mu_0 \left( \frac{H_a}{B_a} \right)$  s'écrit souvent  $\frac{\mu_0 \cdot H}{B}$ . On peut donc écrire :

$$\left( \frac{\mu_0 H_a}{B_a} \right) = - \frac{\mu_0 S_a}{l_a} \left( \frac{1}{\Lambda_{fer}} + \frac{1}{\Lambda_\delta} \right) \quad 1.98$$

avec

- $\Lambda_{fer}$  : perméance de la partie fer
- $\Lambda_\delta$  : perméance de l'entrefer
- $\Lambda_e = \frac{\Lambda_{fer} \cdot \Lambda_\delta}{\Lambda_{fer} + \Lambda_\delta}$  : réluctance externe équivalente

Les courbes de désaimantation données par les fabricants donnent des repères de la forme  $B / \mu_0 \cdot H$  (voir Figure 1-38). Ces repères correspondent à la tangente de la droite de charge définie comme :

$$\tan(\alpha) = \frac{B_a}{\mu_0 \cdot H_a} = -\frac{l_a}{\mu_0 S_a} \Lambda_e \quad 1.99$$

Le point de travail du circuit magnétique ainsi décrit se trouve à l'intersection de la droite de pente  $\tan(\alpha)$  et de la caractéristique de l'aimant.

#### 1.13.4.2 Droite de recul

Cette droite est appelée droite de recul ou droite de désaimantation. Elle est caractérisée par une abscisse à l'origine  $-H_0$  et une ordonnée à l'origine  $B_0$ . La pente de la droite de recul est définie comme

$$\mu_d = \frac{B_0}{H_0} \equiv \frac{\partial B}{\partial H} \quad 1.100$$

Et par conséquent, l'équation de la droite de recul est donnée par l'expression

$$B = B_0 + \mu_d H \quad 1.101$$

#### 1.13.4.3 Point de fonctionnement

Le point de fonctionnement est défini comme le point d'intersection entre les droites de charge et de recul.

$$B_a = B_0 \frac{\Lambda_e}{\Lambda_e + \frac{\mu_d S_a}{l_a}} \quad 1.102$$

$$H_a = -H_0 \frac{\frac{\mu_d S_a}{l_a}}{\Lambda_e + \frac{\mu_d S_a}{l_a}} \quad 1.103$$

L'aimant fonctionne donc toujours dans sa zone de désaimantation  $-2^{\text{ème}}$  quadrant – d'où l'importance de connaître la forme de ce graphique.

Sur la Figure 1-42, le point de fonctionnement  $\{0, B_0\}$  correspond à une droite de charge avec un entrefer nul et une perméabilité relative du circuit magnétique infinie ( $\mu_r = \infty$ ) (perméance externe infinie).

Dans un système dynamique comme un moteur, le point de travail peut se déplacer le long de la caractéristique de l'aimant pour deux raisons, soit la déformation de circuit magnétique, soit la contribution des courants embrassés par le flux.

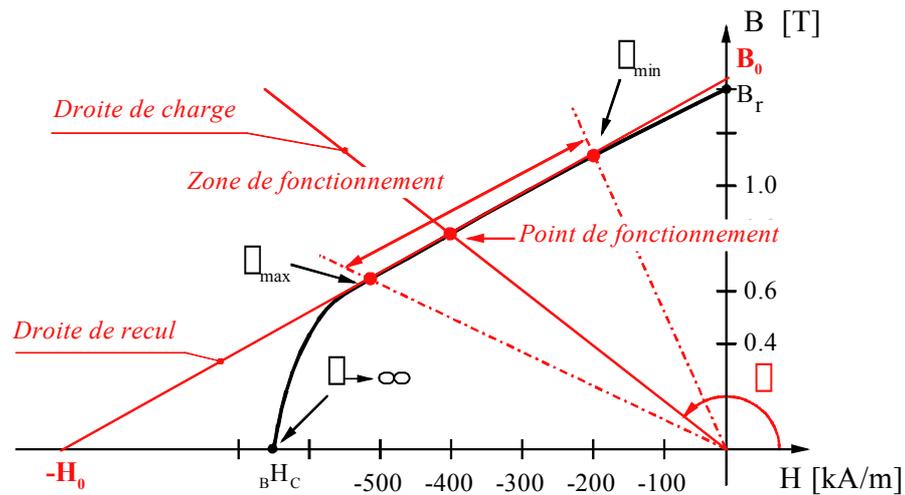


Figure 1-42 : Droite de recul et point de fonctionnement

Dans tous les cas, l'excursion sur la courbe de démagnétisation doit être telle qu'on ne franchisse jamais le coude, faute de quoi on a une perte irréversible d'induction. On n'oubliera pas non plus de considérer l'effet de la température.

Certains graphiques d'aimants permanents sont gradués avec une échelle des  $B/H$  ou  $B/\mu_0 H$ , ou leur inverse, permettant la détermination du point de fonctionnement de l'aimant dès que le circuit magnétique est dimensionné.

#### 1.13.4.4 Définition de la perméance interne de l'aimant

On définit la perméance interne de l'aimant comme

$$\Lambda_i = \frac{\mu_d S_a}{l_a} \quad 1.104$$

ou de manière plus générale

$$\Lambda_i = \int_S \frac{\mu_d}{l_a} dS_a \quad 1.105$$

Les coordonnées du point de fonctionnement deviennent ainsi

$$B_a = B_0 \frac{\Lambda_e}{\Lambda_e + \Lambda_i} \quad 1.106$$

$$H_a = -H_0 \frac{\Lambda_i}{\Lambda_e + \Lambda_i} = -\frac{B_0}{\mu_d} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_e + \Lambda_i} \quad 1.107$$

#### 1.13.4.5 Schéma magnétique équivalent

Le schéma magnétique équivalent de la Figure 1-43 conduit aux mêmes résultats que les relations 1.106 et 1.107, en posant

$$\Theta_{a0} = H_0 l_a = \frac{B_0}{\mu_d} l_a = \frac{\phi_0}{\Lambda_i} \quad 1.108$$

On vérifie l'équivalence de la manière suivante

$$\phi = \frac{\Lambda_i \Lambda_e}{\Lambda_i + \Lambda_e} \Theta_{a0} = \frac{\Lambda_e}{\Lambda_i + \Lambda_e} \phi_0 \tag{1.109}$$

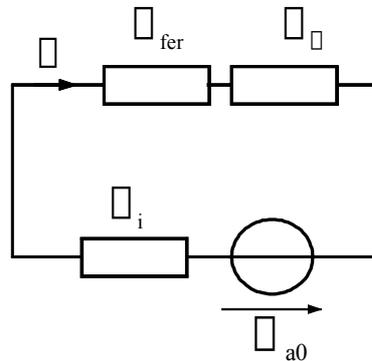


Figure 1-43 : Schéma magnétique équivalent

### 1.13.5 Energie magnétique externe

L'énergie magnétique externe est donnée par la relation 1.77. Dans un milieu linéaire, on peut écrire

$$\begin{aligned} W_{mag} &= \int_V \int_0^B H dB dV = \frac{1}{2} B_e H_e V_e = \frac{1}{2} (B_\delta H_\delta V_\delta + B_{fer} H_{fer} V_{fer}) \\ &= \frac{1}{2} (B_\delta S_\delta H_\delta l_\delta + B_{fer} S_{fer} H_{fer} l_{fer}) = \frac{1}{2} \phi (H_\delta l_\delta + H_{fer} l_{fer}) \\ &= \frac{1}{2} \phi (-H_a l_a) = -\frac{1}{2} B_a S_a H_a l_a = -\frac{1}{2} B_a H_a V_a \end{aligned} \tag{1.110}$$

On peut donc écrire pour le volume de l'aimant

$$V_a = \frac{2W_{mag}}{|B_a H_a|} \tag{1.111}$$

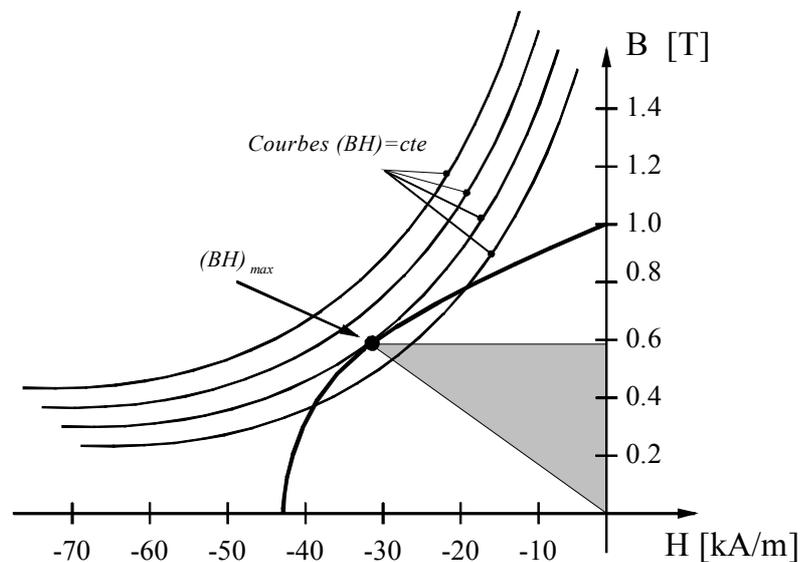


Figure 1-44 : Energie à BH maximum

Lorsqu'on peut se déplacer sur une courbe jusqu'au point où BH est maximum, on a la plus grande variation possible d'énergie magnétique dans le circuit (BH correspond à une densité volumique d'énergie [ $\text{J/m}^3$ ]).

Pour les nuances d'aimants dont la courbe dans le 2<sup>ème</sup> quadrant est rectiligne, ce point se trouve à  $B_r/2$ .

Pour une énergie magnétique externe donnée, le volume de l'aimant sera minimum lorsque la valeur BH sera maximale.

### 1.13.6 Application aux actionneurs

Les nouveaux matériaux magnétiques « durs » à base de terres rares, samarium-cobalt ou néodyme-fer qui sont utilisés dans certains moteurs présentent le grand intérêt :

- d'une part de posséder un  $BH_{\text{max}}$  très élevé
- d'autre part d'avoir un coude de désaimantation dans le troisième quadrant.

La courbe de démagnétisation dans le 2<sup>ème</sup> quadrant est une droite de pente voisine de  $\mu_0$  ( $\mu_r \approx 1$ ). Il s'ensuit que le rapport  $\delta_{\text{eq}}/l_a$  du circuit magnétique peut être grand sans inconvénient. Il faut toutefois faire attention à la température. En effet la Figure 1-38 montre que si la courbe est une droite dans le 2<sup>ème</sup> quadrant à 20°C, ce n'est plus le cas à 100°C et au-dessus.

Conséquence **pour les moteurs** :

- une grande excursion possible sur la courbe BH ;
- un grand entrefer pouvant amener de nouveaux concepts de circuits magnétiques ;
- des performances améliorées dans un volume donné.

Conséquence **pour la fabrication** :

- l'aimant peut être aimanté hors de son circuit définitif, pas de restriction d'entrefer dans le transport ultérieur et la manipulation.

En pratique, l'épaisseur minimum de l'aimant est limitée par la fragilité des ferrites qui supportent très mal la flexion.

Les autres difficultés rencontrées sont le champ de saturation très élevé et les précautions à prendre avec des aimants pour les empêcher de se coller l'un à l'autre.

---

## Bibliographie

- [1] **TRAITE D 'ELECTRICITE**  
ELECTROMECHANIQUE  
Volume IX  
*Auteur : Prof. Marcel Jufer*  
ISBN 2-88074-285-4
  
- [2] **TRAITE D 'ELECTRICITE**  
ELECTROMAGNETISME  
Volume III  
*Auteur : Prof. Fred Gardiol*  
ISBN 2-604-00005-9
  
- [3] **COURS DE SYSTEMES ELECTROMECHANIQUES**  
EIVD  
*Auteur : Prof. Georges Vuffray*
  
- [4] **OXFORD UNIVERSITY PRESS**  
**BRUSHLESS PERMANENT-MAGNET AND RELUCTANCE MOTOR DRIVES**  
*Auteur : Tje Miller*  
ISBN 0-19-859369-4